

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ

Механико-математический факультет



А.Г. Шакир

Конспект лекций по курсу

«Численные методы решения задач математической физики»

для студентов

Алматы 2026

СОДЕРЖАНИЕ

- 1-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Метод Халецкого.
- 2-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод итерации.
- 3-лекция. Интерполирование функций.
- 4-лекция. Постановка задачи интерполирования.
- 5-лекция. Приближенное дифференцирование.
- 6-лекция. Приближенное интегрирование.
- 7-лекция. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 8-лекция. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 9-лекция. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 10-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных сеточными методами. Параболические уравнения.
- 11-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных сеточными методами. Гиперболические уравнения.
- 12-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом прямых. Эллиптические уравнения.
- 13-лекция. Вариационные методы решения краевых задач.
- 14-лекция. Метод Рунге для задачи Дирихле.
- 15-лекция. Интегральные уравнения. Численные методы решения интегральных уравнений.

1-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Метод Халецкого.

Цель лекции — познакомить студентов с методами решения систем линейных алгебраических уравнений, в частности с методом Гаусса и методом Халецкого, сформировать понимание алгоритмов этих методов, их применения для различных типов матриц, а также развить навыки практического решения СЛАУ с использованием данных методов.

План лекции:

1. Метод Гаусса
2. Метод Халецкого
3. Контрольные вопросы
4. Список литературы

1 Метод Гаусса

Рассмотрим следующую *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). Для простоты рассуждений рассмотрим систему с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4, \end{cases} \quad (1.1)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — неизвестные переменные, a_{ij} — коэффициенты при переменных в уравнениях ($i = 1, 2, 3, 4$ номер уравнения, $j = 1, 2, 3, 4$ номер переменной), b_1, b_2, b_3, b_4 — свободные члены (правая часть уравнений).

Первый шаг

Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент). Разделив все коэффициенты первого уравнения системы (1.1) на a_{11} , получим

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{b_1}{a_{11}}. \quad (1.2)$$

Пользуясь уравнением (1.2), легко исключить из системы (1.1) неизвестную x_1 . Для этого достаточно:

1. Умножим уравнение (1.2) на a_{21}

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{21}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}, \quad (1.3)$$

из второго уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.3)

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ - \\ a_{21}x_1 + \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{21}a_{14}}{a_{11}}x_4 &= \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{22}^{(1)}}x_2 + \underbrace{a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{23}^{(1)}}x_3 + \underbrace{a_{24} - \frac{a_{21}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{24}^{(1)}}x_4 = \underbrace{b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}}_{b_2^{(1)}}. \quad (1.5)$$

2. Умножим уравнение (1.2) на a_{31}

$$a_{31}x_1 + a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{31}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{31}\frac{b_1}{a_{11}}, \quad (1.6)$$

из третьего уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.6)

$$\begin{aligned} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ - \\ a_{31}x_1 + \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{31}a_{14}}{a_{11}}x_4 &= \frac{a_{31}b_1}{a_{11}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{32}^{(1)}}x_2 + \underbrace{a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{33}^{(1)}}x_3 + \underbrace{a_{34} - \frac{a_{31}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{34}^{(1)}}x_4 = \underbrace{b_3 - \frac{a_{31}b_1}{a_{11}}}_{b_3^{(1)}}. \quad (1.8)$$

3. Умножим уравнение (1.2) на a_{41}

$$a_{41}x_1 + a_{41}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{41}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{41}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{41}\frac{b_1}{a_{11}}, \quad (1.9)$$

из четвёртого уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.9)

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

$$-$$

$$(1.10)$$

$$a_{41}x_1 + \frac{a_{41} a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{41} a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{41} a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{41} b_1}{a_{11}},$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{42} - \frac{a_{41}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{42}^{(1)}} x_2 + \underbrace{a_{43} - \frac{a_{41}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{43}^{(1)}} x_3 + \underbrace{a_{44} - \frac{a_{41}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{44}^{(1)}} x_4 = b_4 - \underbrace{\frac{a_{41}b_1}{a_{11}}}_{b_4^{(1)}}. \quad (1.11)$$

В результате объединения выражений (1.9), (1.8) и (1.11) получаем систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4 = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + a_{34}^{(1)} x_4 = b_3^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)} x_2 + a_{43}^{(1)} x_3 + a_{44}^{(1)} x_4 = b_4^{(1)}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Второй шаг

Дальше, разделив далее коэффициенты первого уравнения системы (1.12) на «ведущий элемент» $a_{22}^{(1)}$, получим уравнение

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (1.13)$$

Пользуясь уравнением (1.13), легко исключить из системы (1.12) неизвестную x_2 . Чтобы добиться этого, достаточно:

1. Умножим уравнение (1.13) на на $a_{32}^{(1)}$

$$a_{32}^{(1)} x_2 + a_{32}^{(1)} \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + a_{32}^{(1)} \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = a_{32}^{(1)} \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad (1.14)$$

из второго уравнения системы (1.12) вычесть уравнение (1.14)

$$a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + a_{34}^{(1)} x_4 = b_3^{(1)}$$

$$-$$

$$(1.15)$$

$$a_{32}^{(1)} x_2 + \frac{a_{32}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \frac{a_{32}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = \frac{a_{32}^{(1)} b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$$

группируем по x_3, x_4

$$\underbrace{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{33}^{(2)}} x_3 + \underbrace{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{34}^{(2)}} x_4 = b_3^{(1)} - \underbrace{\frac{a_{32}^{(1)} b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{b_3^{(2)}}. \quad (1.16)$$

2. Умножим уравнение (1.13) на $a_{42}^{(1)}$

$$a_{42}^{(1)} x_2 + a_{42}^{(1)} \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + a_{42}^{(1)} \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = a_{42}^{(1)} \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad (1.17)$$

из третьего уравнения системы (1.12) вычтем уравнение (1.17)

$$\begin{aligned} a_{42}^{(1)} x_2 + a_{43}^{(1)} x_3 + a_{44}^{(1)} x_4 &= b_4^{(1)} \\ - \\ a_{42}^{(1)} x_2 + \frac{a_{42}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \frac{a_{42}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 &= \frac{a_{42}^{(1)} b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

группируем по x_3, x_4

$$\underbrace{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{33}^{(2)}} x_3 + \underbrace{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{34}^{(2)}} x_4 = \underbrace{b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{b_3^{(2)}}. \quad (1.19)$$

В результате объединения выражений (1.16) и (1.19) получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = b_3^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 = b_4^{(2)}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Третий шаг

Теперь, разделив далее коэффициенты первого уравнения системы (1.20) на «ведущий элемент» $a_{33}^{(2)}$, получим уравнение

$$x_3 + \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad (1.21)$$

Пользуясь уравнением (1.21), легко исключить из системы (1.20) неизвестную x_3 . Для выполнения этого умножим уравнение (1.20) на $a_{33}^{(2)}$

$$a_{33}^{(2)} x_3 + a_{33}^{(2)} \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 = a_{33}^{(2)} \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \quad (1.22)$$

из второго уравнения системы (1.20) вычтем уравнение (1.22)

$$\begin{aligned} a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 &= b_4^{(2)} \\ - \\ a_{33}^{(2)} x_3 + \frac{a_{33}^{(2)} a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 &= \frac{a_{33}^{(2)} b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

группируем по x_4

$$\underbrace{a_{44}^{(2)} - \frac{a_{33}^{(2)} a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}}_{a_{44}^{(3)}} x_4 = \underbrace{b_4^{(2)} - \frac{a_{33}^{(2)} b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}}_{b_4^{(3)}}. \quad (1.24)$$

В результате получим следующее уравнение

$$a_{44}^{(3)} x_4 = b_4^{(3)}. \quad (1.25)$$

Четвёртый шаг

Отсюда следует, что

$$x_4 = \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.26)$$

С помощью выражений (1.21) и (1.26) находим неизвестное x_3

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.27)$$

Далее с помощью выражений (1.13), (1.26) и (1.27) находим неизвестное x_2

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \left(\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right) - \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.28)$$

В заключение, используя формулы (1.2), (1.26), (1.27) и (1.28), определяем неизвестное x_1

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \left[\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \left(\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right) - \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right] - \frac{a_{13}}{a_{11}} \left[\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right] - \frac{a_{14}}{a_{11}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \quad (1.29)$$

Следовательно, как видно из выражений (1.26), (1.27), (1.28) и (1.29), мы нашли решения системы линейных алгебраических уравнений (1.1).

Примечание. Метод Гаусса — один из классических алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Суть метода заключается в последовательном преобразовании системы к верхнетреугольному виду с последующим обратным ходом для нахождения всех неизвестных. Этот метод широко применяется благодаря своей универсальности и простоте алгоритма. Он подходит для систем любого размера, при условии, что определитель матрицы коэффициентов не равен нулю, и позволяет получить точное решение в случае СЛАУ с точными коэффициентами. К преимуществам метода Гаусса можно отнести универсальность, ясный пошаговый алгоритм, который легко реализуется на компьютере, и возможность точного решения для систем с точными данными. Однако метод имеет и недостатки. Он чувствителен к ошибкам округления при работе с числами с плавающей запятой, обладает высокой вычислительной сложностью для больших систем (примерно $O(n^3)$) и требует перестановки строк (частичный или полный выбор главного элемента) для устойчивости, что усложняет реализацию.

2 Метод Халецкого

Для удобства рассуждений истему линейных уравнений (1.1) запишем в матричном виде

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Представим матрицу $\mathcal{A}$ в виде произведения нижней треугольной матрицы

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

и верхней треугольной матрицы

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

с единичной диагональю, т. е.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}. \quad (2.5)$$

Тогда элементы матриц $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ определяются следующими формулами

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{11} = a_{11}, \mathbf{b}_{12} = 0, \mathbf{b}_{13} = 0, \mathbf{b}_{14} = 0 \\ \mathbf{b}_{21} = a_{21}, \mathbf{b}_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12}, \mathbf{b}_{23} = 0, \mathbf{b}_{24} = 0 \\ \mathbf{b}_{31} = a_{31}, \mathbf{b}_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12}, \mathbf{b}_{33} = a_{33} - b_{31}c_{13} - b_{32}c_{23}, \mathbf{b}_{34} = 0 \\ \mathbf{b}_{41} = a_{41}, \mathbf{b}_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12}, \mathbf{b}_{43} = a_{43} - b_{41}c_{13} - b_{42}c_{23}, \mathbf{b}_{44} = a_{44} - b_{41}c_{14} - b_{42}c_{24} - b_{43}c_{34} \end{cases} \quad (2.6)$$

и

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{11} = 1, \mathbf{c}_{12} = \frac{a_{12}}{b_{11}}, \mathbf{c}_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}}, \mathbf{c}_{14} = \frac{a_{14}}{b_{11}} \\ \mathbf{c}_{22} = 1, \mathbf{c}_{23} = \frac{a_{23} - b_{21}c_{13}}{b_{22}}, \mathbf{c}_{24} = \frac{a_{24} - b_{21}c_{14}}{b_{22}} \\ \mathbf{c}_{33} = 1, \mathbf{c}_{34} = \frac{a_{34} - b_{31}c_{14} - b_{32}c_{24}}{b_{33}} \\ \mathbf{c}_{44} = 1 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Отсюда искомый вектор $\mathbf{x}$ может быть вычислен из цепи уравнений

$$\mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathcal{C}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Тогда как матрицы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ треугольные, то системы (2.8) легко решаются, а именно

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{b_{11}}, \\ y_2 &= \frac{b_2 - b_{21}y_1}{b_{22}}, \\ y_3 &= \frac{b_3 - b_{31}y_1 - b_{32}y_2}{b_{33}}, \\ y_4 &= \frac{b_4 - b_{41}y_1 - b_{42}y_2 - b_{43}y_3}{b_{44}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

и

$$\begin{aligned} x_4 &= y_4, \\ x_3 &= y_3 - c_{34}x_4, \\ x_2 &= y_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4, \\ x_1 &= y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из формул (2.9) видно, что числа y_1, y_2, y_3, y_4 выгодно вычислять вместе с элементами матрицы $\mathcal{C}$.

Примечание. Метод Халецкого не использует выбор ведущего элемента, так как применяется только к симметричным положительно определённым матрицам. В отличие от LU-разложения с выбором ведущего элемента, метод Холецкого не требует перестановки строк.

3 Контрольные вопросы

1. В чём основные различия между методом Гаусса и Халецкого?
2. Какой метод требует меньше арифметических операций?
3. В каком случае метод Гаусса является более универсальным?
4. Для каких матриц применим метод Халецкого?
5. В чём заключается разложение Халецкого $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$?

4 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–7].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.
- [2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989.
- [3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.
- [4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие*. 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.
- [6] Шакинов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.
- [7] Сұлтангазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.

2-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод итерации.

Цель лекции — изучить методы решения систем линейных алгебраических уравнений, освоить итерационные методы (например, метод простых итераций), понять условия сходимости итерационных процессов и научиться применять их для нахождения приближённых решений систем.

План лекции:

1. Метод итерации
2. Пример
3. Метод Зейделя
4. Пример
5. Преимущества и недостатки метода итерации Якоби
6. Контрольные вопросы
7. Список литературы

5 Метод итерации

Рассмотрим следующую *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). Для простоты рассуждений рассмотрим систему с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \quad (5.1)$$

где x_1, x_2, x_3 — неизвестные переменные, a_{ij} — коэффициенты при переменных в уравнениях ($i = 1, 2, 3$ номер уравнения, $j = 1, 2, 3$ номер переменной), b_1, b_2, b_3 — свободные члены (правая часть уравнений).

Если мы запишем систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде, то имеем

$$Ax = b, \quad (5.2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Предполагаем, что диагональные коэффициенты

$$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.4)$$

1. Разрешая первое уравнение системы (5.1) относительно x_1 , получаем

$$x_1 = \underbrace{\frac{b_1}{a_{11}}}_{\beta_1} - \underbrace{\frac{a_{12}}{a_{11}}}_{\alpha_{12}} x_2 - \underbrace{\frac{a_{13}}{a_{11}}}_{\alpha_{13}} x_3. \quad (5.5)$$

Следовательно,

$$x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3. \quad (5.6)$$

2. Разрешая второе уравнение системы (5.1) относительно x_2 , получаем

$$x_2 = \underbrace{\frac{b_2}{a_{22}}}_{\beta_2} - \underbrace{\frac{a_{21}}{a_{22}}}_{\alpha_{21}} x_1 - \underbrace{\frac{a_{23}}{a_{22}}}_{\alpha_{23}} x_3. \quad (5.7)$$

Следовательно,

$$x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3. \quad (5.8)$$

3. Разрешая третье уравнение системы (5.1) относительно x_3 , получаем

$$x_3 = \underbrace{\frac{b_3}{a_{33}}}_{\beta_3} - \underbrace{\frac{a_{31}}{a_{33}}}_{\alpha_{31}} x_1 - \underbrace{\frac{a_{32}}{a_{33}}}_{\alpha_{32}} x_2. \quad (5.9)$$

Следовательно,

$$x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2. \quad (5.10)$$

Используя формулы (5.6), (5.8) и (5.10), получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3, \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Введем следующие матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Здесь элементы $\alpha_{jj} = 0$, $j = 1, 2, 3$. Систему (5.11) можем записать в матричной форме

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x}. \quad (5.13)$$

Систему (5.13) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем, например, столбец свободных членов:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

где $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ – нулевое приближение. Далее, последовательно строим матрицы-столбцы

$$\mathbf{x}^{(1)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(0)} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$ – первое приближение. Отсюда имеем

$$\mathbf{x}^{(2)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(1)} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

где $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$ – второе приближение. Вообще говоря, любое $(k+1)$ -е приближение вычисляют по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(k)} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.17)$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (5.13). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (5.17), будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

или

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x},$$

т. е. предельный вектор $\mathbf{x}$ является решением системы (5.13), а следовательно, и системы (5.1).

6 Пример

Решить систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \quad (6.1)$$

методом итерации.

Решение. Здесь диагональные коэффициенты 4, 3, 4 системы значительно преобладают над остальными коэффициентами. Приведём эту систему к нормальному виду (5.11):

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2. \end{cases} \quad (6.2)$$

В матричной форме систему (6.2) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

За нулевые приближения корней системы (6.1) принимаем:

$$x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 3, \quad x_3^{(0)} = 5.$$

Подставляя эти значения в правые части уравнений (6.2), получим первые приближения корней:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92, \quad x_2^{(1)} = 3 - 0,03 \cdot 2 + 0,05 \cdot 5 = 3,19, \quad x_3^{(1)} = 5 - 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 5,04.$$

Далее, подставляя эти найденные приближения в формулу (6.2), получим вторые приближения корней:

$$x_1^{(2)} = 1,9094, \quad x_2^{(2)} = 3,1944, \quad x_3^{(2)} = 5,0446.$$

После новой подстановки будем иметь третьи приближения:

$$x_1^{(3)} = 1,90923, \quad x_2^{(3)} = 3,19495, \quad x_3^{(3)} = 5,04485, \dots$$

Результаты вычислений можно оформить в таблице:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

7 Метод Зейделя

Систему (5.13) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение выберем, например, столбец свободных членов:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ — нулевое приближение. При подстановке полученного нулевого приближения (5.11) в систему получаем выражение следующего вида

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \alpha_{13}x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} \end{cases}. \quad (7.2)$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$ – первое приближение. Отсюда имеем

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(1)} + \alpha_{13}x_3^{(1)}, \\ x_2^{(2)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(2)} + \alpha_{23}x_3^{(1)}, \\ x_3^{(2)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(2)} + \alpha_{32}x_2^{(2)} \end{cases}, \quad (7.3)$$

где $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$ – второе приближение. В общем случае $(k+1)$ -е приближение вычисляется по формуле

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(k+1)} + \alpha_{13}x_3^{(k+1)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k+1)}, \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(k)} + \alpha_{32}x_2^{(k)} \end{cases}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.4)$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (5.13). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (7.4), будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

или

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x},$$

т. е. предельный вектор $\mathbf{x}$ является решением системы (5.13), а следовательно, и системы (5.1).

8 Пример

Методом Зейделя решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение. Приведём эту систему к виду, удобному для итерации:

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases}$$

В качестве нулевых приближений корней возьмём:

$$x_1^{(0)} = 1.2, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0.$$

Применяя процесс Зейделя, последовательно получим:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0 - 0.1 \cdot 0 = 1.2, \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.1 \cdot 0 = 1.06, \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.06 = 0.948, \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \cdot 1.06 - 0.1 \cdot 0.948 = 0.9992, \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.1 \cdot 0.948 = 1.00536, \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.2 \cdot 1.00536 = 0.999088, \end{cases} \quad (\text{II})$$

и т. д.

Результаты вычислений с точностью до четырёх знаков помещены в таблице.

Таблица 1: Нахождение корней линейной системы методом Зейделя

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2000	0.0000	0.0000
1	1.2000	1.0600	0.9480
2	0.9992	1.0054	0.9991
3	0.9996	1.0001	1.0001
4	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000

Точные значения корней:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

9 Преимущества и недостатки метода итерации Якоби

- Простота реализации: формула метода Якоби очень проста и легко программируется.
- Параллельность вычислений: новые значения переменных на каждой итерации вычисляются независимо друг от друга.
- Не требует разложения матрицы: работает без полного разложения матрицы, что экономит память для больших систем.
- Эффективен для разреженных систем: сохраняет структуру разреженной матрицы и не создаёт дополнительных заполнений.
- Лёгкий контроль сходимости: можно оценить сходимость с помощью норм матрицы или диагонального преобладания.
- Медленная сходимость: метод может сходиться медленно, особенно для плохо обусловленных систем.
- Требует диагонального преобладания: для гарантии сходимости матрица должна удовлетворять определённым условиям.
- Не всегда эффективен для плотных матриц: при плотных системах прямые методы могут быть быстрее.

10 Контрольные вопросы

1. Что такое метод Якоби для решения систем линейных алгебраических уравнений?
2. Как записывается итерационная формула метода Якоби для системы $Ax = b$?
3. В чем заключается принцип разложения матрицы A на диагональную и недиагональную части в методе Якоби?
4. Какие условия обеспечивают сходимость метода Якоби?
5. Как можно проверить, что итерационный процесс метода Якоби сошелся к точному решению?
6. В чем различие между методом Якоби и методом Гаусса–Зейделя?

7. Как влияет размер диагональных элементов матрицы A на скорость сходимости метода Якоби?

8. Решите систему методом Якоби

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1,235 \\ 1,089 \\ 0,560 \end{pmatrix}$$

9. Решите систему методом Зейделя

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.
- [2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989.
- [3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.
- [4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие*. 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.

- [6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.
- [7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.
- [8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики*. Москва: Наука, 1970.

3-лекция. Интерполирование функций

Цель лекции – сформировать у студентов понимание основных методов интерполирования и научить строить интерполяционные приближения функций по заданным узлам, анализировать точность интерполяции и оценивать погрешность полученных приближений.

План лекции:

1. Конечные разности различных порядков
2. Таблица конечных разностей
3. Обобщённая степень
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

12 Конечные разности различных порядков

Пусть

$$y = f(x)$$

— заданная функция. Обозначим через

$$\Delta x = h$$

фиксированную величину приращения аргумента (*шаг*). Тогда выражение

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (12.1)$$

называется *первой конечной разностью* функции y . Аналогично определяются конечные разности высших порядков:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Например,

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= \Delta(\Delta y) = \Delta[f(x + \Delta x) - f(x)] = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) \\ &= \underbrace{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}_{\Delta f(x + \Delta x)} - \underbrace{f(x + \Delta x) - f(x)}_{\Delta f(x)} \\ &= f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y &= \Delta (\Delta^2 y) = \Delta [f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)] = \\
&= \Delta f(x+2\Delta x) - 2\Delta f(x+\Delta x) + \Delta f(x) = \\
&= \underbrace{f(x+3\Delta x) - f(x+2\Delta x)}_{\Delta f(x+2\Delta x)} - 2 \underbrace{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)}_{\Delta f(x+\Delta x)} + \underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta f(x)} \\
&= f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x), \\
\Delta^4 y &= \Delta (\Delta^3 y) = \dots
\end{aligned}$$

Конечная разность n -го порядка определяется последовательными значениями функции $f(x)$ следующим образом

$$\begin{aligned}
\Delta^n f(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_k^n f(x+k\Delta x) = \\
&= (-1)^n C_0^n f(x) + (-1)^{n-1} C_1^n f(x+\Delta x) + (-1)^{n-2} C_2^n f(x+2\Delta x) + \dots + C_n^n f(x+n\Delta x), \quad n=1,2,3,\dots
\end{aligned}$$

где $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n=0,1,2,\dots$, $k=0,1,\dots,n$.

Пример. Построить конечные разности для функции

$$f(x) = x^3,$$

считая шаг $\Delta x = 1$. **Решение.** Имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1, \\
\Delta^2 f(x) &= [3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1] - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6, \\
\Delta^3 f(x) &= [6(x+1) + 6] - (6x + 6) = 6, \\
\Delta^n f(x) &= 0 \quad \text{при } n > 3.
\end{aligned}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на отрезке $[x, x+n\Delta x]$. Тогда справедлива важная формула

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + \theta n \Delta x), \quad (12.2)$$

где

$$0 < \theta < 1.$$

Формулу (12.2) проще всего доказать, используя метод математической индукции. В самом деле, при $n=1$ мы получаем теорему Лагранжа о конечном приращении функции и, следовательно, формула (12.2) верна. Пусть теперь при $k < n$ имеем:

$$\Delta^k f(x) = (\Delta x)^k f^{(k)}(x + \theta' k \Delta x), \quad 0 < \theta' < 1.$$

Тогда

$$\Delta^{k+1}f(x) = \Delta^k[f(x + \Delta x) - f(x)] = (\Delta x)^k[f^{(k)}(x + \Delta x + \theta'k\Delta x) - f^{(k)}(x + \theta'k\Delta x)].$$

Применяя теорему Лагранжа к получившемуся приращению производной $f^{(k)}(x)$, будем иметь:

$$\Delta^{k+1}f(x) = (\Delta x)^k \Delta x f^{(k+1)}(x + \theta'k\Delta x + \theta''\Delta x) = (\Delta x)^{k+1} f^{(k+1)}(x + \theta(k+1)\Delta x),$$

где $0 < \theta < 1$. Таким образом, установлен переход от k к $k+1$, и следовательно формула (12.2) доказана.

Из формулы (12.2) имеем

$$f^{(n)}(x + \theta n\Delta x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и предполагая, что производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна, получим

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \quad (12.3)$$

Следовательно, при малых Δx справедлива приближённая формула

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \quad (12.4)$$

13 Таблица разностей

Часто приходится рассматривать функции $y = f(x)$, заданные табличными значениями $y_i = f(x_i)$ для системы равноотстоящих точек x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), где

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const.}$$

Конечные разности последовательности y_i естественно определяются соотношениями:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Из первого равенства имеем:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = (1 + \Delta)y_i.$$

Отсюда последовательно выводим:

$$y_{i+2} = (1 + \Delta)y_{i+1} = (1 + \Delta)^2 y_i, \quad y_{i+3} = (1 + \Delta)y_{i+2} = (1 + \Delta)^3 y_i, \quad \dots, \quad y_{i+n} = (1 + \Delta)^n y_i.$$

Используя формулу бинома Ньютона, получаем:

$$y_{i+n} = y_i + C_1^n \Delta y_i + C_2^n \Delta^2 y_i + \dots + \Delta^n y_i.$$

Обратно, имеем:

$$\Delta^n y_i = [(1 + \Delta) - 1]^n y_i = \Delta y_i - C_1^n \Delta^{n-1} y_i + C_2^n \Delta^{n-2} y_i - \dots + (-1)^n y_i,$$

или

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_1^n y_{n+i-1} + C_2^n y_{n+i-2} - \dots + (-1)^n y_i.$$

Например:

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \quad \Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Конечные разности различных порядков удобно располагать в форме таблиц двух видов:

Таблица 2: Горизонтальная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Таблица 3: Диагональная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2		
x_3	y_3			

Пример. Составим горизонтальную таблицу разностей функции

$$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

от начального значения $x_0 = 0$, приняв шаг $h = 1$.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad y_0 = -1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 13$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 11, \quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 8$$

Эти значения заносим в таблицу. Так как функция — полином третьей степени, третья разность постоянна:

$$\Delta^3 y_i = 2 \cdot 3! = 12.$$

Таблица 4: Горизонтальная таблица разностей кубической функции

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12

Дальнейшее заполнение таблицы можно проводить с помощью суммирования:

$$\Delta^2 y_{i+1} = \Delta^2 y_i + 12, \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + \Delta^2 y_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

14 Обобщённая степень

В дальнейшем нам понадобится понятие об обобщенной степени.

Определение 14.1. Обобщенной n -степенью числа x называется произведение n сомножителей, первый из которых равен x , а каждый следующий на h меньше предыдущего:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h) \cdots [x-(n-1)h], \quad (14.1)$$

где h — некоторое фиксированное постоянное число.

Показатель обобщенной степени обычно записывается в квадратных скобках. Полагают $x^{[0]} = 1$. При $h = 0$ обобщенная степень (14.1) совпадает с обычной:

$$x^{[n]} = x^n.$$

Вычислим конечные разности для обобщенной степени, полагая $\Delta x = h$. Для первой разности имеем:

$$\begin{aligned} \Delta x^{[n]} &= (x+h)^{[n]} - x^{[n]} \\ &= (x+h)x \cdots [x-(n-2)h] - x(x-h) \cdots [x-(n-1)h] \\ &= x(x-h) \cdots [x-(n-2)h] \left\{ (x+h) - [x-(n-1)h] \right\} \\ &= x(x-h) \cdots [x-(n-2)h] \cdot nh = nh x^{[n-1]}. \end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta x^{[n]} = nh x^{[n-1]}. \quad (14.2)$$

Подсчитаем вторую разность:

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nh x^{[n-1]}) = nh \Delta x^{[n-1]} = nh(n-1)h x^{[n-2]} = nh^2(n-1) x^{[n-2]}.$$

Итак,

$$\Delta^2 x^{[n]} = n(n-1)h^2 x^{[n-2]}.$$

Методом математической индукции легко доказать общую формулу

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1) \cdots [n-(k-1)] h^k x^{[n-k]},$$

где $k = 1, 2, \dots, n$. Очевидно,

$$\Delta^k x^{[n]} = 0 \quad \text{при } k > n.$$

Из формулы (14.2) вытекает также простая формула конечного суммирования. Пусть $x_0, x_1, x_2, \dots$ — равноотстоящие точки с шагом h :

$$x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим сумму

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]}.$$

Так как в силу формулы (14.2) имеем

$$x^{[n]} = \frac{\Delta x^{[n+1]}}{h(n+1)},$$

то

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{h(n+1)} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_i^{[n+1]} = \frac{1}{h(n+1)} \left(x_1^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} + x_2^{[n+1]} - x_1^{[n+1]} + \dots \right. \\ &\quad \left. + x_N^{[n+1]} - x_{N-1}^{[n+1]} \right) = \frac{1}{h(n+1)} \left(x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]} = \frac{x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}}{h(n+1)}. \quad (14.3)$$

Формула (14.3) аналогична формуле Ньютона—Лейбница для целой положительной степени.

15 Контрольные вопросы

1. Дайте определение конечной разности первого, второго и третьего порядков.
2. Как выражается первая конечная разность функции $f(x)$ через значения функции в узлах?
3. Свяжите конечные разности разных порядков с производными функции.
4. Приведите пример вычисления второй конечной разности для функции $f(x) = x^2$ с шагом $h = 1$.
5. Как строится таблица конечных разностей для равномерной сетки значений функции?
6. Для чего используется таблица конечных разностей при интерполяции?
7. В чем отличие таблиц прямых и обратных конечных разностей?
8. Дайте определение обобщённой степени (формула Ньютона для $(x+a)^n$ с любым действительным n) и приведите пример её использования в разложении функции.

16 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–16].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.
- [2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989.
- [3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.
- [4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

- [5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие*. 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.
- [6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.
- [7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.
- [8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики*. Москва: Наука, 1970.
- [9] Уиттекер, Э., и Г. Робинсон. *Математическая обработка результатов наблюдений*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1933. Гл. I.
- [10] Гончаров, В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. Гл. I, §§ 18–21.
- [11] Скарборо, Дж. *Численные методы математического анализа*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. IV, разд. II.
- [12] Брадис, В. М. *Теория и практика вычислений*. Москва: Учпедгиз, 1935. Гл. IX.
- [13] Милн, В. Э. *Численный анализ*. Москва: ИЛ, 1961. Гл. III, VI.
- [14] Ремез, Е. Я. *Общие вычислительные методы чебышевского приближения*. Киев: Изд. АН УССР, 1957. Ч. 1, Гл. I.
- [15] Леднев, Н. А., ред. *Математический практикум на счетно-вычислительных приборах и инструментах*. Москва: Советская наука, 1959. Гл. III.
- [16] Фаддеева, В. Н. *Вычислительные методы линейной алгебры*. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1950. Гл. III, § 27.

4-лекция. Постановка задачи интерполирования

Цель лекции – сформировать у студентов представление об основных методах интерполирования и развить навыки построения интерполяционных приближений функций по заданным узлам, а также умение анализировать точность интерполяции и оценивать погрешность полученных приближений.

План лекции:

1. Постановка задачи
2. Первая интерполяционная формула Ньютона
3. Вторая интерполяционная формула Ньютона
4. Интерполяционная формула Гаусса
5. Интерполяционная формула Лагранжа
6. Контрольные вопросы
7. Список литературы

17 Постановка задачи

Простейшая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ заданы $n + 1$ точки $x_0, x_1, \dots, x_n$, которые

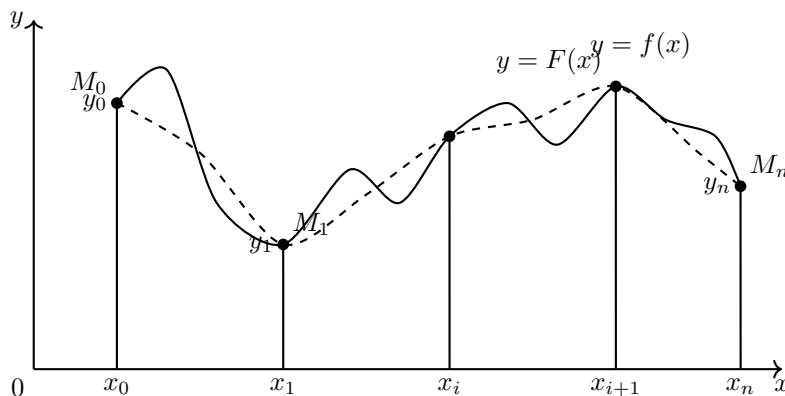


Рис. 1:

называются *узлами интерполяции*, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad f(x_n) = y_n. \quad (17.1)$$

Требуется построить функцию $F(x)$ (*интерполирующую функцию*), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, то есть такую, что

$$F(x_0) = y_0, \quad F(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad F(x_n) = y_n. \quad (17.2)$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y = F(x)$ некоторого определённого типа, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) (рисунок-1).

В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений или совсем не иметь решений. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям (17.2), то есть такой, что

$$P_n(x_0) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P_n(x_n) = y_n.$$

Полученную интерполяционную формулу

$$y = F(x)$$

обычно используют для приближённого вычисления значений данной функции $f(x)$ для значений аргумента x , отличных от узлов интерполирования. Такая операция называется *интерполированием*

функции $f(x)$. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда $x \in [x_0, x_n]$, то есть значение x является промежуточным между x_0 и x_n , и *экстраполирование*, когда $x \notin [x_0, x_n]$. В дальнейшем под термином интерполирование мы будем понимать как первую, так и вторую операции.

18 Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть узлы интерполирования расположены равномерно:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $h = \text{const}$, и

$$y_i = f(x_i).$$

Тогда *первая интерполяционная формула Ньютона* имеет вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (18.1)$$

где

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

а $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ — конечные разности. Формулу (18.1) выгодно использовать для интерполирования функции $y = f(x)$ в окрестности начального значения x_0 , где q мало по абсолютной величине.

Если в формуле (1.1) положить $n = 1$, то получим формулу *линейного интерполирования*:

$$P_1(x) = y_0 + q \Delta y_0.$$

При $n = 2$ будем иметь формулу *параболического* или *квадратичного интерполирования*:

$$P_2(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 y_0.$$

Пример 1. Приняв шаг $h = 0,05$, построить на отрезке $[3,5; 3,6]$ интерполяционный полином Ньютона для функции $y = e^x$, заданной таблицей:

x	3.50	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33.115	34.813	36.598	38.475	40.447

Таблица 5: Таблица значений функции $y = e^x$

Решение. Составляем таблицу разностей. Заметим, что в столбцах разностей, следуя обычной практике, мы указываем десятичные разряды. Так как разности третьего порядка практически постоянны, то в формуле (1.1) полагаем $n = 3$. Приняв $x_0 = 3.50$, $y_0 = 33.115$, будем иметь:

$$P_3(x) = 33.115 + 1.698q + \frac{0.087}{2}q(q-1) + \frac{0.005}{6}q(q-1)(q-2),$$

или

$$P_3(x) = 33.115 + 1.698q + 0.0435q(q-1) + 0.00083q(q-1)(q-2),$$

где

$$q = \frac{x - 3.50}{0.05} = 20(x - 3.5).$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3.50	33.115	1698	87	5
3.55	34.813	1785	92	3
3.60	36.598	1877	95	
3.65	38.475	1972		
3.70	40.447			

Таблица 6: Таблица разностей функции $y = e^x$

Пример 2. В таблице 3 приведены значения интеграла вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, приближённо найти $\Phi(1.43)$.

Решение. Дополняем таблицу 3 конечными разностями функции $y = \Phi(x)$ до третьего порядка включительно. За x_0 принимаем ближайшее табличное значение к искомому значению $x = 1.43$, т. е. полагаем $x_0 = 1.4$. Так как $h = 0.1$, то

$$q = \frac{1.43 - 1.4}{0.1} = 0.3.$$

Подставляя в формулу (18.1), получим:

$$y \approx 0.9523 + 0.3 \cdot 0.0138 + \frac{0.3(0.3-1)}{2!}(-0.0036) + \frac{0.3(0.3-1)(0.3-2)}{3!} \cdot 0.0009.$$

Откуда

$$\Phi(1.43) \approx 0.95686.$$

(Табличное значение: $\Phi(1.43) = 0.9569$, см. таблицы функций Янке и Эмде.)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.0	0.8427	375	-74	10
1.1	0.8802	301	-64	10
1.2	0.9103	237	-54	9
1.3	0.9340	183	-45	9
1.4	0.9523	138	-36	9
1.5	0.9661	102	-27	5
1.6	0.9763	75	-22	6
1.7	0.9838	53	-16	4
1.8	0.9891	37	-12	
1.9	0.9928	25		
2.0	0.9953			

Таблица 7: Таблица разностей функции $y = \Phi(x)$

19 Вторая интерполяционная формула Ньютона

Пусть заданы значения функции $y = f(x)$ в узлах $x_0, x_1, \dots, x_n$. Вторая интерполяционная формула

Ньютона записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\
 + \frac{\Delta^n y_0}{n!}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1),
 \end{aligned} \tag{19.1}$$

где Δy_i — конечные разности функции y . Введем удобную запись

$$q = \frac{x - x_n}{h},$$

тогда формула принимает вид

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{19.2}$$

Пример. Дана таблица значений функции $y = \lg x$:

x	y
1000	3,000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Найти $\lg 1044$.

Решение. Составляем таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	-426	2
1010	3,0043214	42788	-418	9
1020	3,0086002	42370	-409	8
1030	3,0128372	41961	-401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Берем $x_n = 1050$, шаг $h = 10$, тогда

$$q = \frac{1044 - 1050}{10} = -0.6$$

Используя формулу Ньютона, получаем:

$$\begin{aligned} \lg 1044 \approx & 3,0211893 + (-0.6) \cdot 0,0041560 + \frac{(-0.6)(-0.6+1)}{2} \cdot 0,00000401 \\ & + \frac{(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)}{6} \cdot 0,00000008 = 3,0187005 \end{aligned}$$

20 Интерполяционная формула Гаусса

Пусть x_0 — центральный узел таблицы, h — шаг, $t = \frac{x-x_0}{h}$, а $\Delta^k f_i$ — центральные разности.

Первая формула Гаусса (точка около x_0)

$$f(x) = f_0 + t \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \Delta^4 f_{-2} + \dots$$

Вторая формула Гаусса (точка после x_0)

$$f(x) = f_0 + t \Delta f_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!} \Delta^3 f_{-2} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!} \Delta^4 f_{-2} + \dots$$

Схема узлов для центральных разностей



21 Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть заданы $n + 1$ узлов $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$, $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$.

Формула Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x),$$

где базисные многочлены Лагранжа определяются как

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (21.1)$$

Свойство

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Пример 1. Для функции $y = \sin \pi x$ построить интерполяционный полином Лагранжа, выбрав узлы

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Решение. Вычисляем соответствующие значения функции:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Применяя формулу (21.1), получим:

$$L_2(x) = \frac{(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{1}{6})(0 - \frac{1}{2})} \cdot 0 + \frac{x(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{6} - 0)(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x(x - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})} \cdot 1.$$

или

$$L_2(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Пример 2. Дана таблица значений функции $y = f(x)$:

x	y
321,0	2,50651
322,8	2,50893
324,2	2,51081
325,0	2,51188

Вычислить значение $f(323,5)$.

Решение. Положим $x = 323,5$, $n = 3$. Тогда по формуле (21.1) будем иметь:

$$\begin{aligned} f(323,5) &= \frac{(323,5 - 322,8)(323,5 - 324,2)(323,5 - 325,0)}{(321 - 322,8)(321 - 324,2)(321 - 325)} \cdot 2,50651 \\ &+ \frac{(323,5 - 321)(323,5 - 324,2)(323,5 - 325)}{(322,8 - 321)(322,8 - 324,2)(322,8 - 325)} \cdot 2,50893 \\ &+ \frac{(323,5 - 321)(323,5 - 322,8)(323,5 - 325)}{(324,2 - 321)(324,2 - 322,8)(324,2 - 325)} \cdot 2,51081 \\ &+ \frac{(323,5 - 321)(323,5 - 322,8)(323,5 - 324,2)}{(325 - 321)(325 - 322,8)(325 - 324,2)} \cdot 2,51188 \\ &= -0,07996 + 1,18794 + 1,83897 - 0,43708 \\ &= 2,50987. \end{aligned}$$

22 Контрольные вопросы

1. Что называется интерполяционным многочленом и в чём состоит задача интерполирования?
2. Запишите общий вид интерполяционного многочлена Лагранжа для $n + 1$ узлов.
3. Что такое базисные многочлены Лагранжа $L_i(x)$ и какими свойствами они обладают?
4. В чём заключается отличие интерполяционной формулы Ньютона от формулы Лагранжа?
5. Что такое разделённые разности и как строится таблица разделённых разностей?
6. Запишите интерполяционный многочлен Ньютона через разделённые разности.
7. Для каких случаев применяется первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона (вперёд/назад)?
8. В чём состоит идея интерполяционной формулы Гаусса и когда она применяется?

9. Чем отличаются первая и вторая формулы Гаусса, и как выбирается центральный узел?
10. От чего зависит погрешность интерполирования и как записывается остаточный член для интерполяционного многочлена?

23 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–16].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.
- [2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989.
- [3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.
- [4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие*. 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.
- [6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.
- [7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.
- [8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики*. Москва: Наука, 1970.
- [9] Уиттекер, Э., и Г. Робинсон. *Математическая обработка результатов наблюдений*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1933. Гл. I.

- [10] Гончаров, В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. Гл. I, §§ 18–21.
- [11] Скарборо, Дж. *Численные методы математического анализа*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. IV, разд. II.
- [12] Брадис, В. М. *Теория и практика вычислений*. Москва: Учпедгиз, 1935. Гл. IX.
- [13] Милн, В. Э. *Численный анализ*. Москва: ИЛ, 1961. Гл. III, VI.
- [14] Ремез, Е. Я. *Общие вычислительные методы чебышевского приближения*. Киев: Изд. АН УССР, 1957. Ч. 1, Гл. I.
- [15] Леднев, Н. А., ред. *Математический практикум на счетно-вычислительных приборах и инструментах*. Москва: Советская наука, 1959. Гл. III.
- [16] Фаддеева, В. Н. *Вычислительные методы линейной алгебры*. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1950. Гл. III, § 27.

5-лекция. Приближенное дифференцирование

Цель лекции — изучить методы приближённого (численного) дифференцирования функций, заданных таблично, на основе интерполяционных формул Ньютона; вывести формулы для вычисления первых и высших производных через конечные разности; исследовать порядок точности полученных формул и оценку погрешности численного дифференцирования.

План лекции:

1. Постановка задачи
2. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона
3. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

24 Постановка задачи

При решении практических задач часто нужно найти производные указанных порядков от функции $y = f(x)$, заданной таблично. Возможно также, что в силу сложности аналитического выражения функции $f(x)$ непосредственное дифференцирование ее затруднительно. В этих случаях обычно прибегают к приближенному дифференцированию. Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию $f(x)$ на интересующем отрезке $[a, b]$ интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом), а затем полагают:

$$f'(x) = P'(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (24.1)$$

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции $f(x)$.

Если для интерполирующей функции $P(x)$ известна погрешность

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

то погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x), \quad (24.2)$$

т. е. погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции. То же самое справедливо и для производных высших порядков.

Следует отметить, что, вообще говоря, приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Действительно, близость друг к другу ординат двух кривых

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad Y = P(x)$$

на отрезке $[a, b]$ еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $P'(x)$, т. е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента.

25 Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона

Пусть имеем функцию $y(x)$, заданную в равноотстоящих точках x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) отрезка $[a, b]$ с помощью значений $y_i = f(x_i)$. Для нахождения на $[a, b]$ производных $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ и т. д.

¹ функцию y приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для системы узлов $x_0, x_1, \dots, x_k$ ($k \leq n$).

Имеем:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots \quad (25.1)$$

где

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Производя перемножение биномиов, получим:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \dots \quad (25.2)$$

¹Само собой разумеется, что заранее должно быть известно о существовании соответствующих производных функции $f(x)$, иначе выкладки носят иллюзорный характер.

Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq},$$

то

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right]. \quad (25.3)$$

Аналогично, так как

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx},$$

то

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right]. \quad (25.4)$$

Таким же способом в случае надобности можно вычислить и производные функции $y(x)$ любого порядка. Заметим, что при нахождении производных $y'(x)$, $y''(x)$, $\dots$ в фиксированной точке x в качестве x_0 следует выбирать ближайшее табличное значение аргумента.

Иногда требуется находить производные функции y в основных табличных точках x_i . В этом случае формулы численного дифференцирования упрощаются. Так как каждое табличное значение можно считать за начальное, то положим $x = x_0$, $q = 0$; тогда будем иметь:

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots \right), \quad (25.5)$$

и

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots \right). \quad (25.6)$$

Если $P_k(x)$ — интерполяционный полином Ньютона, содержащий разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^k y_0$, и

$$R_k(x) = y(x) - P_k(x)$$

— соответствующая погрешность, то погрешность в определении производной есть

$$R'_k(x) = y'(x) - P'_k(x).$$

Как известно,

$$R_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi) = h^{k+1} \frac{q(q-1)\dots(q-k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi), \quad (25.7)$$

где ξ — некоторое промежуточное число между значениями $x_0, x_1, \dots, x_k, x$. Поэтому, предполагая, что $y(x) \in C^{k+2}$, получим:

$$R'_k(x) = \frac{dR_k}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{h^k}{(k+1)!} \left\{ y^{(k+1)}(\xi) \frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-k)] + q(q-1)\dots(q-k) \frac{d}{dq} [y^{(k+1)}(\xi)] \right\}.$$

Отсюда при $x = x_0$, и, следовательно, при $q = 0$, и учитывая, что

$$\left. \frac{d}{dq} [q(q-1) \dots (q-k)] \right|_{q=0} = (-1)^k k!,$$

будем иметь:

$$R'_k(x_0) = (-1)^k \frac{h^k}{k+1} y^{(k+1)}(\xi). \quad (25.8)$$

Так как $y^{(k+1)}(\xi)$ во многих случаях трудно оценить, то при h малом приближённо полагают:

$$y^{(k+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_0}{h^{k+1}},$$

и, следовательно,

$$R'_k(x_0) \approx \frac{(-1)^k}{h} \frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}. \quad (25.9)$$

Аналогично может быть найдена погрешность $R''_k(x_0)$ для второй производной $y''(x_0)$.

Пример 1. Найти $y'(50)$ функции $y = \lg x$, заданной таблично (таблица 1).

Таблица 1: Значения функции $y = \lg x$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	-36	5
55	1,7404	378	-31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

Решение. Здесь $h = 5$. Дополняем таблицу 1 столбцами конечных разностей (десятичные разряды, как обычно, не указываются; они определяются десятичными разрядами значений функции).

Используя первую строчку таблицы, на основании формулы (25.5), с точностью до разностей третьего порядка, будем иметь:

$$y'(50) = \frac{1}{5} (0,0414 + 0,0018 + 0,0002) = 0,0087.$$

Для оценки точности найденного значения заметим, что так как табулированная выше функция есть $y = \lg x$, то

$$y'_x = \frac{M}{x} = \frac{0,43429}{x}.$$

Следовательно,

$$y'(50) = \frac{0,43429}{50} = 0,0087.$$

Таким образом, результаты совпадают с точностью до четвертого десятичного знака.

Пример 2. Путь $y = f(t)$, пройденный прямолинейно движущейся точкой за время t , дается следующей таблицей:

i	Время t_i , сек	Путь $y(t_i)$, см
0	0,00	0,000
1	0,01	1,519
2	0,02	6,031
3	0,03	13,397
4	0,04	23,396
5	0,05	35,721
6	0,06	50,000
7	0,07	65,798
8	0,08	82,635
9	0,09	100,000

Используя конечные разности до пятого порядка включительно, приближенно найти скорость

$$V = \frac{dy}{dt}$$

и ускорение

$$W = \frac{d^2y}{dt^2}$$

точки для моментов $t = 0; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04$.

Решение. Составляем таблицу разностей.

Таблица 2: Конечные разности функции $y = f(t)$

i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1,519	2,993	-0,139	-0,082	-0,004
1	4,512	2,854	-0,221	-0,086	0,021
2	7,366	2,633	-0,307	-0,065	0,002
3	9,999	2,326	-0,372	-0,063	0,018
4	12,325	1,954	-0,435	-0,045	0,014
5	14,279	1,519	-0,486	-0,031	—
6	15,798	1,039	-0,511	—	—
7	16,837	0,528	—	—	—
8	17,365	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—

Полагая $h = 0,01$ и применяя формулы (25.5) и (25.6), получаем приближенные значения величины скорости V (см/сек) и величины ускорения W (см/сек²). Например,

$$V(0) = 100 (1,519 - 1,496 - 0,046 + 0,020 - 0,001) = -0,4 \text{ см/сек},$$

$$W(0) = 10\,000 (2,993 + 0,139 - 0,075 + 0,003) = 30\,600 \text{ см/сек}^2.$$

Соответствующие значения V и W помещены в таблице 3.

Таблица 3: Значения скорости V и ускорения W для закона движения $y = f(t)$

t	V	W	$\tilde{V}$	$\tilde{W}$
0,00	0,4	30600	0,00	30462
0,01	303,6	29780	303,08	30001
0,02	596,3	28780	596,98	28625
0,03	873,2	26250	872,66	26381
0,04	1121,7	23360	1121,9	23340

Заметим, что табулированный закон движения дается формулой

$$y = 100 \left(1 - \cos \frac{50\pi t}{9} \right).$$

Отсюда

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{5000\pi}{9} \sin \frac{50\pi t}{9},$$

и

$$W = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{250000\pi^2}{81} \cos \frac{50\pi t}{9}.$$

Для сравнения точные значения $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$ приведены в правой половине таблицы 3.

Отметим, что можно вывести также формулы приближенного дифференцирования, исходя из второй интерполяционной формулы Ньютона.

26 Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках

Пусть точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — равноотстоящие, т. е.

$$x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

и пусть для функции $y = y(x)$ известны значения $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Для данной системы узлов x_i построим интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x) y_i}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)},$$

где

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Тогда

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Полагая

$$\frac{x - x_0}{h} = q,$$

получим:

$$\Pi_{n+1}(x) = h^{n+1} q(q-1) \cdots (q-n) = h^{n+1} q^{[n+1]},$$

и

$$\begin{aligned} \Pi'_{n+1}(x_i) &= (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) \\ &= h^n i(i-1) \cdots 1 (-1) \cdots [-(n-i)] = (-1)^{n-i} h^n i!(n-i)! \end{aligned} \quad (26.1)$$

Следовательно, для полинома Лагранжа $L_n(x)$ имеем выражение

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}. \quad (26.2)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{dx}{dq} = h,$$

получаем:

$$y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \frac{d}{dq} \left(\frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right). \quad (26.3)$$

Аналогично могут быть найдены производные высших порядков данной функции $y(x)$. Для оценки погрешности

$$r_n(x) = y'(x) - L'_n(x)$$

воспользуемся известной формулой погрешности интерполяционной формулы (26.2)

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x), \quad (26.4)$$

где $\xi = \xi(x)$ — промежуточное значение между точками $x_0, x_1, \dots, x_n$ и x .

Предполагая, что $y(x) \in C^{(n+2)}$, выводим:

$$r_n(x) = R'_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(\xi) \Pi'_{n+1}(x) + \Pi_{n+1}(x) \frac{d}{dx} [y^{(n+1)}(\xi)] \right\}.$$

Отсюда, учитывая формулу (26.1), получаем погрешность производной в узлах

$$R'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi), \quad (26.5)$$

где ξ — промежуточное значение между $x_0, x_1, \dots, x_n$.

I. Произведем расчет для $n = 2$ (три точки). Из формулы (26.2) получаем:

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0 (q-1)(q-2) - y_1 q (q-2) + \frac{1}{2} y_2 q (q-1).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{dx}{dq} = h,$$

будем иметь:

$$y'(x) \approx L'_2(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} y_0 (2q-3) - y_1 (2q-2) + \frac{1}{2} y_2 (2q-1) \right].$$

В частности, для производных

$$y'(x_i) = y'_i, \quad (i = 0, 1, 2).$$

получим следующие выражения:

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2); \quad y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2); \quad y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2).$$

с соответствующими погрешностями:

$$r_0 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_0); \quad r_1 = -\frac{1}{6} h^2 y'''(\xi_1); \quad r_2 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_2).$$

Приведем без доказательства формулы дифференцирования для четырех и пяти точек [3], справедливость которых читатель легко может проверить самостоятельно.

II. $n = 3$ (четыре точки).

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi); \\ y'_1 &= \frac{1}{6h} (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi); \\ y'_2 &= \frac{1}{6h} (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi); \\ y'_3 &= \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

III. $n = 4$ (пять точек).

$$\begin{aligned} y'_0 &= \frac{1}{12h} (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5} y^{(5)}(\xi), \\ y'_1 &= \frac{1}{12h} (-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{h^4}{20} y^{(5)}(\xi), \\ y'_2 &= \frac{1}{12h} (y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30} y^{(5)}(\xi), \\ y'_3 &= \frac{1}{12h} (-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) - \frac{h^4}{20} y^{(5)}(\xi), \\ y'_4 &= \frac{1}{12h} (3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{4} y^{(5)}(\xi). \end{aligned}$$

Формула численного дифференцирования выражается более просто и обладает повышенной точностью. Ниже приводятся для случая $n = 2$ и $n = 4$ формулы таких центральных производных [3], причём для выявления симметрии изменена нумерация точек (рисунок 1):

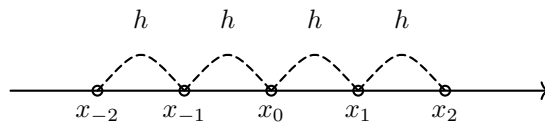


Рисунок 1.

I. $n = 2$.

$$y'_0 = \frac{1}{2h}(y_1 - y_{-1}) - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\xi),$$

где $y_i = y(x_i)$ и $i = -1, 0, 1$.

II. $n = 4$.

$$y'_0 = \frac{2}{3h}(y_1 - y_{-1}) - \frac{1}{12h}(y_2 - y_{-2}) + \frac{h^4}{30}y^{(5)}(\xi),$$

где $y_i = y(x_i)$ и $i = -2, -1, 0, 1, 2$.

27 Контрольные вопросы

1. В чём состоит задача приближённого (численного) дифференцирования функции?
2. Почему приближённое дифференцирование, вообще говоря, является менее точной операцией, чем интерполирование?
3. Запишите первую интерполяционную формулу Ньютона для равноотстоящих узлов.
4. Как получить формулу для первой производной $y'(x)$ из интерполяционного многочлена Ньютона?
5. Запишите формулы для $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$ через конечные разности.
6. Как записывается остаточный член интерполяционного многочлена Ньютона и как из него получить оценку погрешности производной?
7. Как влияет шаг сетки h на точность приближённого дифференцирования?

28 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–10].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Scarborough, James. *Numerical Mathematical Analysis*. Moscow–Leningrad: GTTI, 1934.

- [2] Mikeladze, Sh. E. *Chislennye metody matematicheskogo analiza*. Moscow: Gostekhizdat, 1953.
- [3] Milne, William E. *Numerical Analysis*. Moscow: Inostrannaya Literatura, 1951.
- [4] Runge, Carl. *Graphical Methods of Mathematical Computation*. Moscow–Leningrad: GTTI, 1932.
- [5] Krylov, A. N. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniyakh*. 6th ed. Moscow: Gostekhizdat, 1954.
- [6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.
- [7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.
- [8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики*. Москва: Наука, 1970.
- [9] Уиттекер, Э., и Г. Робинсон. *Математическая обработка результатов наблюдений*. Москва–Ленинград: GTTI, 1933. Гл. I.
- [10] Гончаров, В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций*. Москва–Ленинград: GTTI, 1934. Гл. I, §§ 18–21.

6-лекция. Приближенное интегрирование

Цель лекции — сформировать у обучающихся понимание основных численных методов вычисления определённых интегралов, их теоретических основ, погрешностей и областей применимости, а также развить навыки их практического использования.

План лекции:

1. Постановка задачи
2. Квадратурные формулы Ньютона–Котеса
3. Формула трапеций и ее остаточный член
4. Формула Симпсона и ее остаточный член
5. Контрольные вопросы
6. Список литературы

29 Постановка задачи

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна её первообразная $F(x)$, то определённый интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (29.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной; вследствие этого вычисление определённого интеграла по формуле (29.1) может быть затруднительным или даже практически невыполнимым. Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задаётся таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближённые и в первую очередь численные методы вычисления определённых интегралов. Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определённого интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции. Численное вычисление

однократного интеграла называется механической квадратурой, двойного — механической кубатурой.

Соответствующие формулы будем называть квадратурными и кубатурными формулами. Мы сначала остановимся на численном вычислении однократных интегралов. Обычный приём механических квадратур состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ заменяют интерполяционной или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближённо полагают:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (29.2)$$

Функция $\varphi(x)$ должна быть такова, чтобы интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$ вычислялся непосредственно. Если функция $f(x)$ задана аналитически, то ставится вопрос об оценке погрешности формулы (29.2). Рассмотрим более подробно применение для этой цели интерполяционного полинома Лагранжа.

Пусть для функции $y = f(x)$ известны в $n + 1$ точка $x_0, x_1, \dots, x_n$ отрезка $[a, b]$ соответствующие значения

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (29.3)$$

Требуется приближённо найти:

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

По заданным значениям y_i построим полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} y_i, \quad (29.4)$$

где

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

причём

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Заменяя функцию $f(x)$ полиномом $L_n(x)$, получим равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + R_n[f], \quad (29.5)$$

где $R_n[f]$ — ошибка квадратурной формулы (29.5) (остаточный член).

Отсюда, воспользовавшись выражением (29.4), получаем приближённую квадратурную формулу

$$\int_a^b y dx = \sum_{i=0}^n A_i y_i, \quad (29.6)$$

где

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} dx \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (29.7)$$

Если пределы интегрирования a и b являются узлами интерполирования, то квадратурная формула (29.6) называется замкнутого типа, в противном случае — открытого типа. Для вывода коэффициентов A_i заметим, что коэффициенты A_i при данном выборе узлов не зависят от выбора функции $f(x)$.

Для полинома степени n формула (29.6) — точная, так как тогда $L_n(x) \equiv f(x)$; следовательно, в частности, формула (29.6) точна при $y = x^k$ ($k = 0, 1, \dots, n$), т. е.

$$\int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n A_i x_i^k.$$

Полагая $y = x^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) в формуле (29.6), получим линейную систему из $n + 1$ уравнений

$$\begin{cases} I_0 = \sum_{i=0}^n A_i, \\ I_1 = \sum_{i=0}^n A_i x_i, \\ \dots \\ I_n = \sum_{i=0}^n A_i x_i^n, \end{cases} \quad (29.8)$$

где

$$I_k = \int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

из которой можно определить коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_n$.

Определитель системы (29.8) есть определитель Вандермонда

$$D = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Заметим, что при применении этого метода фактически построение полинома Лагранжа $L_n(x)$ является излишним. Простой метод подсчёта погрешности квадратурных формул разработан С. М. Никольским [3].

Пример. Вывести квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 y dx = A_0 y\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 y\left(\frac{3}{4}\right). \quad (29.9)$$

Решение. Полагая в формуле (29.9) $y = x^k$ ($k = 0, 1, 2$) и учитывая, что

$$\int_0^1 dx = 1, \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

получим систему

$$\begin{cases} 1 = A_0 + A_1 + A_2, \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{4}A_2, \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{16}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{9}{16}A_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{3},$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 y \, dx = \frac{2}{3} y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} y\left(\frac{3}{4}\right). \quad (29.10)$$

Квадратурная формула (29.10) открытого типа является точной для всех полиномов степени не выше второй. Нетрудно убедиться, что формула (29.10) даёт правильный результат и при $y = x^3$. Поэтому эта формула является точной также для полиномов третьей степени.

30 Квадратурные формулы Ньютона–Котеса

Пусть для данной функции $y = f(x)$ требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b y \, dx.$$

Выбрав шаг

$$h = \frac{b-a}{n},$$

разобьём отрезок $[a, b]$ с помощью равноотстоящих точек

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad x_n = b$$

на n равных частей, и пусть

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Заменяя функцию y соответствующим интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$, получим приближённую квадратурную формулу

$$\int_{x_0}^{x_n} y \, dx = \sum_{i=0}^n A_i y_i. \quad (30.1)$$

Как известно,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) y_i, \quad (30.2)$$

где

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad (30.3)$$

Введём обозначение

$$q = \frac{x-x_0}{h}, \quad (30.4)$$

и

$$q^{[n+1]} = q(q-1)\cdots(q-n). \quad (30.5)$$

Тогда будем иметь:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i. \quad (30.6)$$

Подставляя (30.6) в формулу (30.1), получаем

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dx.$$

Так как

$$q = \frac{x-x_0}{h}, \quad dq = \frac{dx}{h},$$

то после замены переменной имеем

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq, \quad (i=0, 1, 2, \dots, n).$$

Поскольку

$$h = \frac{b-a}{n},$$

обычно полагают

$$A_i = (b-a)H_i,$$

где

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq, \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (30.7)$$

Квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i, \quad (30.8)$$

где

$$y_i = f(a+ih), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Нетрудно убедиться, что справедливы соотношения:

$$\sum_{i=0}^n H_i = 1, \quad H_i = H_{n-i}.$$

31 Формула трапеций и ее остаточный член

Применяя формулу (30.7) предыдущего параграфа, при $n = 1$ имеем:

$$H_0 = - \int_0^1 \frac{\dot{q}(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2}, \quad H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2};$$

отсюда

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1). \quad (31.1)$$

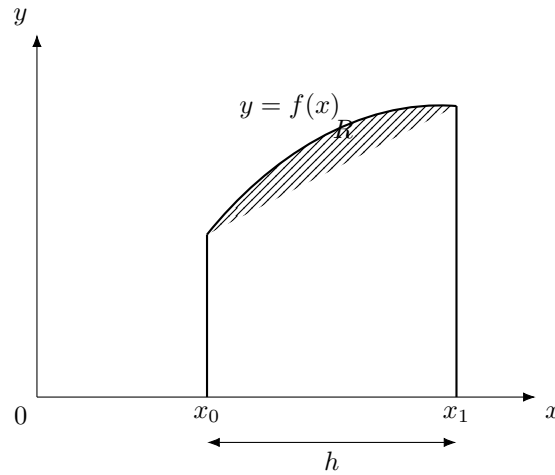


Рисунок 1

Мы получили известную формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла (рисунок 1). Остаточный член (ошибка) квадратурной формулы (31.1) равен

$$R = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2} (y_0 + y_1).$$

Предполагая, что $y \in C^2[a, b]$, выведем простую формулу для остаточного члена. Будем рассматривать $R = R(h)$ как функцию шага h ; тогда можно положить:

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2} [y(x_0) + y(x_0 + h)].$$

Дифференцируя эту формулу по h последовательно два раза, получим:

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0 + h) - \frac{1}{2} [y(x_0) + y(x_0 + h)] - \frac{h}{2} y'(x_0 + h) \\ &= \frac{1}{2} [y(x_0 + h) - y(x_0)] - \frac{h}{2} y'(x_0 + h), \end{aligned}$$

и

$$R''(h) = \frac{1}{2} y'(x_0 + h) - \frac{1}{2} y'(x_0 + h) - \frac{h}{2} y''(x_0 + h) = -\frac{h}{2} y''(x_0 + h),$$

причем

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0.$$

Отсюда, интегрируя по h и используя теорему о среднем, последовательно выводим:

$$\begin{aligned} R'(h) &= R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^h t y''(x_0 + t) dt \\ &= -\frac{1}{2} y''(\xi_1) \int_0^h t dt = -\frac{h^2}{4} y''(\xi_1), \end{aligned}$$

где $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$, и

$$\begin{aligned} R(h) &= R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{4} \int_0^h t^2 y''(\xi_1) dt \\ &= -\frac{1}{4} y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12} y''(\xi), \end{aligned}$$

где $\xi \in (x_0, x_0 + h)$. Таким образом, окончательно имеем:

$$R = -\frac{h^3}{12} y''(\xi), \tag{31.2}$$

где $\xi \in (x_0, x_1)$.

Отсюда, в частности, следует, что если $y'' > 0$, то формула (31.1) дает значение интеграла с избытком, если же $y'' < 0$ — то с недостатком.

32 Формула Симпсона и ее остаточный член

Из формулы (30.7) при $n = 2$ получаем:

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{1}{6},$$

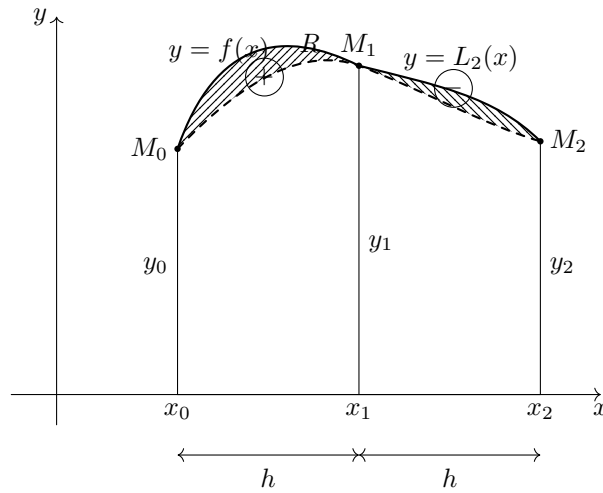
$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, так как $x_2 - x_0 = 2h$, имеем:

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (32.1)$$

Формула (32.1) носит название *формулы Симпсона*. Геометрически эта формула получается в результате замены данной кривой $y = f(x)$ параболой $y = L_2(x)$, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (рисунок 2).



Остаточный член формулы Симпсона равен

$$R = \int_{x_0}^{x_2} y dx - \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Предполагая, что $y \in C^4[a, b]$, аналогично тому как это делалось для формулы трапеций, выведем более простое выражение для R . Фиксируя среднюю точку x_1 и рассматривая $R = R(h)$ как функцию шага h ($h \geq 0$), будем иметь:

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} y dx - \frac{h}{3} [y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)].$$

Отсюда, дифференцируя функцию $R(h)$ по h последовательно три раза, получим:

$$\begin{aligned}
R'(h) &= [y(x_1 + h) + y(x_1 - h)] - \frac{1}{3}[y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)] \\
&\quad - \frac{h}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] \\
&= \frac{2}{3}[y(x_1 - h) + y(x_1 + h)] - \frac{4}{3}y(x_1) - \frac{h}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)]; \\
R''(h) &= \frac{2}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] \\
&\quad - \frac{h}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] \\
&= \frac{1}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)]. \\
R'''(h) &= \frac{1}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[-y'''(x_1 - h) + y'''(x_1 + h)] \\
&= -\frac{h}{3}[y'''(x_1 + h) - y'''(x_1 - h)] = -\frac{2h^2}{3}y^{IV}(\xi_3), \quad \xi_3 \in (x_1 - h, x_1 + h).
\end{aligned}$$

Кроме того, имеем:

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) = 0.$$

Последовательно интегрируя $R'''(h)$, используя теорему о среднем, находим:

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t) dt = -\frac{2}{3} \int_0^h t^2 y^{IV}(\xi_3) dt = -\frac{2}{3} y^{IV}(\xi_2) \int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9} h^3 y^{IV}(\xi_2),$$

где $\xi_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$;

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{2}{9} \int_0^h t^3 y^{IV}(\xi_2) dt = -\frac{2}{9} y^{IV}(\xi_1) \int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18} h^4 y^{IV}(\xi_1),$$

где $\xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h)$;

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{18} \int_0^h t^4 y^{IV}(\xi_1) dt = -\frac{1}{18} y^{IV}(\xi) \int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$.

Таким образом, остаточный член формулы Симпсона равен

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi), \quad (2)$$

где $\xi \in (x_0, x_2)$.

Следовательно, эта формула является точной для полиномов не только второй, но и третьей степени, т. е. формула Симпсона при относительно малом числе ординат обладает повышенной точностью.

33 Контрольные вопросы

1. В чём заключается задача численного интегрирования?
2. Что называется квадратурной формулой?
3. Чем отличаются квадратурные формулы замкнутого и открытого типа?
4. В чём состоит идея замены подынтегральной функции интерполяционным полиномом?
5. Как строится интерполяционный полином Лагранжа?
6. Как выводятся коэффициенты квадратурной формулы?
7. Что такое алгебраическая степень точности квадратурной формулы?
8. Как определяется погрешность квадратурной формулы?
9. Для каких полиномов формулы Ньютона–Котеса являются точными?
10. В чём преимущества и недостатки численных методов интегрирования по сравнению с аналитическим методом?

34 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mikeladze, Sh. E. 1953. *Chislennye metody matematicheskogo analiza*. Moscow: Gostekhizdat.
- [2] Mikhlin, V. E. 1951. *Chislennyyi analiz*. Moscow: IL.
- [3] Nikolskii, S. M. 1958. *Kvadrurnye formuly*. Moscow: Fizmatgiz.
- [4] Markov, A. 1911. *Ischislenie konechnykh raznostei*. 2nd ed. Moscow: Matezis.
- [5] Steffensen, I. F. 1935. *Teoriya interpolyatsii*. Moscow–Leningrad.

- [6] Berezin, I. S., and N. P. Zhidkov. 1959. *Metody vychislenii*. Vol. 1. Moscow: Fizmatgiz.
- [7] Scarborough, J. 1934. *Chislennye metody matematicheskogo analiza*. Moscow: GTTL.
- [8] Krylov, A. N. 1933. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniyakh*. 2nd ed. Moscow: IAN SSSR.
- [9] Krylov, V. I. 1959. *Priblizhennoe vychislenie integralov*. Moscow: Fizmatgiz.
- [10] Salvadori, M. J. 1955. *Chislennye metody v tekhnike*. Moscow: IL.
- [11] Fikhtengolts, G. M. 1948. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. Vol. 2. Moscow: Gostekhizdat.

7-лекция. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель лекции — изучение теоретических основ и освоение практических навыков применения численных методов для приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений с анализом их точности, устойчивости и сходимости.

План лекции:

1. Постановка задачи
2. Решение задачи Коши с помощью формулы Тейлора
3. Методы Рунге–Кутты
4. Пример метода Рунге–Кутты 4-го порядка
5. Контрольные вопросы
6. Список литературы

35 Постановка задачи

Задача решения обыкновенных дифференциальных уравнений сложнее задачи вычисления однократных интегралов, и доля задач, интегрируемых в явном виде, здесь существенно меньше. Когда говорят об интегрируемости в явном виде, имеют в виду, что решение может быть вычислено при помощи конечного числа «элементарных» операций: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, логарифмирования, потенцирования, вычисления синуса и косинуса и т.п. Уже в период, предшествовавший появлению ЭВМ, понятия «элементарной» операции претерпели изменения. Решения некоторых частных задач настолько часто встречаются в приложениях, что пришлось составить таблицы их значений, в частности таблицы интегралов Френеля, функций Бесселя и ряда других, так называемых специальных функций. При наличии таких таблиц исчезает принципиальная разница между вычислением функций $\sin x$, $\ln x$, ... и специальных функций. В том и другом случаях можно вычислять значения этих функций при помощи таблиц, и те и другие функции можно вычислять, приближая их многочленами, рациональными дробями и т.д. Таким образом, в класс задач, интегрируемых в явном виде, включились задачи, решения которых выражаются через специальные

функции. Однако и этот, более широкий, класс составляет относительно малую долю задач, предъявляемых к решению. Существенное расширение класса реально решаемых дифференциальных уравнений, а следовательно, и расширение сферы применения математики произошло с разработкой численных методов и активным повсеместным использованием ЭВМ. В настоящее время затраты человеческого труда при решении на ЭВМ задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений сравнимы с затратами на то, чтобы просто переписать заново формулировку этой задачи. При желании можно получить график решения или его изображение на экране. В результате этого для многих категорий научных работников существенно уменьшился интерес к изучению частных способов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в явном виде. Эта глава посвящена описанию основных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, исследованию свойств этих методов и оценке их погрешности. Обратим внимание на то обстоятельство, что, как и в других случаях, первоначальный анализ практической пригодности методов и отбрасывание непригодных методов часто удается произвести, изучая простейшие задачи, где точное и приближенное решения задачи выписываются в явном виде.

36 Решение задачи Коши с помощью формулы Тейлора

Один из простейших по своему описанию методов решения задачи Коши основан на использовании формулы Тейлора. Пусть требуется найти на отрезке $[x_0, x_0 + X]$ решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (36.1)$$

при начальном условии

$$y(x_0) = y_0,$$

где $f(x, y)$ — функция, аналитическая в точке (x_0, y_0) .

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$\begin{aligned} y'' &= f_x(x, y) + f_y(x, y) y', \\ y''' &= f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)(y')^2 + f_y(x, y)y'', \dots \end{aligned}$$

Подставляя $x = x_0$, $y = y_0$ в (36.1) и в последние соотношения, последовательно получаем значения

$$y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0), \dots$$

Таким образом, можно написать приближённое равенство

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i. \quad (36.2)$$

Если значение $|x - x_0|$ больше радиуса сходимости ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i,$$

то погрешность (36.2) не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, и предлагаемый метод неприменим. Иногда целесообразно поступить следующим образом. Разобьём отрезок $[x_0, x_0 + X]$ на отрезки $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, N$. Будем последовательно получать приближения y_j к значениям решения $y(x_j)$, $j = 1, \dots, N$, по следующему правилу. Пусть значение y_j уже найдено. Вычислим значения в точке x_j производных $y^{(i)}$ решения исходного дифференциального уравнения, проходящего через точку (x_j, y_j) . На отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ полагаем

$$y(x) \approx z_j(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_j^{(i)}}{i!} (x - x_j)^i, \quad (36.3)$$

и соответственно берём

$$y_{j+1} = z_j(x_{j+1}). \quad (36.4)$$

Рассмотрим случай, когда $x_{j+1} - x_j = h$. Если бы значение y_j совпадало со значением точного решения $y(x_j)$, то погрешность от замены y_{j+1} на $z_j(x_{j+1})$ имела бы порядок $O(h^{n+1})$. Поскольку мы вносим погрешность $O(h^{n+1})$ на каждом шаге, то можно ожидать, что при уменьшении шага сетки будет выполняться соотношение

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y_j - y(x_j)| = O(h^n).$$

В ряде случаев такого рода рассуждения приводят к неправильному заключению о наличии факта сходимости приближённого решения к точному, в то время как в действительности этого нет. Поэтому строгое обоснование сходимости метода при уменьшении шага, а также получение оценки погрешности имеют не только теоретическое, но и важнейшее практическое значение.

37 Методы Рунге–Кутты

В частном случае $n = 1$ формула (36.3) имеет вид

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \quad h = x_{j+1} - x_j. \quad (37.1)$$

Этот метод называется методом Эйлера. Можно построить другой класс расчётных формул, к которому принадлежит метод Эйлера. Укажем сначала простейшие методы этого класса, получаемые из наглядных соображений.

Пусть известно значение $y(x)$ и требуется вычислить значение $y(x+h)$. Рассмотрим равенство

$$y(x+h) = y(x) + \int_0^h y'(x+t) dt. \quad (37.2)$$

При замене интеграла в правой части на величину $hy'(x)$ погрешность имеет порядок $O(h^2)$, т.е.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + O(h^2).$$

Поскольку $y'(x) = f(x, y(x))$, отсюда имеем

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2).$$

Отбрасывая член порядка $O(h^2)$ и обозначая $x = x_j$, $x+h = x_{j+1}$, получим расчётную формулу Эйлера (37.1).

Для получения более точной расчётной формулы нужно точнее аппроксимировать интеграл в правой части (37.2). Воспользовавшись квадратурной формулой трапеций, получим

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} (y'(x) + y'(x+h)) + O(h^3),$$

иначе,

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} (f(x, y(x)) + f(x+h, y(x+h))) + O(h^3). \quad (37.3)$$

Соответствующая расчётная формула

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})) + O(h^3) \quad (37.4)$$

называется неявной формулой Адамса второго порядка точности.

В некоторых случаях, в частности, когда f линейна по y , это уравнение может быть разрешено относительно y_{j+1} . Обычно же это уравнение неразрешимо явно относительно y_{j+1} , поэтому произведём дальнейшее преобразование алгоритма.

Заменим $y(x+h)$ в правой части (37.3) на некоторую величину

$$y^* = y(x+h) + O(h^2). \quad (37.5)$$

Тогда правая часть изменится на величину

$$\frac{h}{2} (f(x+h, y^*) - f(x+h, y(x+h))) = \frac{h}{2} f_y(x+h, \bar{y}) (y^* - y(x+h)),$$

где $\bar{y}$ находится между y^* и $y(x+h)$. Вследствие предположения (37.5) эта величина имеет порядок $O(h^3)$. Таким образом, при условии (37.5) имеет место соотношение

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} (f(x, y(x)) + f(x+h, y^*)) + O(h^3).$$

Условию (37.5) удовлетворяет результат вычислений по формуле Эйлера:

$$y^* = y(x) + hf(x, y(x)).$$

Последние соотношения определяют пару расчётных формул

$$y_{j+1}^* = y_j + hf(x_j, y_j), \quad (37.6)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}^*)) . \quad (37.7)$$

При малых h выражение в правой части (37.4) удовлетворяет условию сжимаемости, поэтому уравнение (37.4) также можно решать методом простой итерации:

$$y_{j+1}^{k+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}^k)) .$$

Если y_{j+1}^0 вычисляется по методу Эйлера:

$$y_{j+1}^0 = y_j + hf(x_j, y_j),$$

то y_{j+1}^1 , получаемое на первом шаге итерации, совпадает с y_{j+1} , получаемым по формуле (37.7). Дальнейшие итерации не приводят к повышению порядка точности по h , в то же время иногда главный член погрешности уменьшается при переходе от y_{j+1}^1 к y_{j+1}^2 . Если такое уменьшение погрешности компенсирует возрастание вычислительных затрат на шаге, то оно целесообразно.

Можно предложить теоретически обоснованный критерий, позволяющий при малых h выбирать каждый раз наиболее целесообразное число итераций. Однако его использование требует очень большого объёма дополнительных вычислений. Поэтому выбор между числом итераций, равным 1 или 2, обычно осуществляется на основе предшествующего опыта, вычислительного эксперимента или просто «волевым» образом.

Построим другую пару формул с погрешностью на шаге того же порядка. Интеграл в правой части (37.2) заменим по формуле прямоугольников:

$$y(x+h) = y(x) + hy' \left(x + \frac{h}{2} \right) + O(h^3),$$

или, что всё равно,

$$y(x+h) = y(x) + hf\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) + O(h^3).$$

Если

$$y^* = y\left(x + \frac{h}{2}\right) + O(h^2),$$

то, как и в предыдущем случае, имеем

$$y(x+h) = y(x) + hf\left(x + \frac{h}{2}, y^*\right) + O(h^3).$$

В качестве y^* можно взять результат вычислений по формуле Эйлера с шагом $\frac{h}{2}$:

$$y^* = y(x) + \frac{h}{2}f(x, y).$$

Этим соотношениям соответствует пара расчетных формул

$$\begin{aligned} y_{j+1/2} &= y_j + \frac{h}{2}f(x_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{j+1/2}\right). \end{aligned} \tag{37.8}$$

Полученные методы относятся к семейству методов Рунге–Кутты, имеющих следующий вид. В процессе вычислений фиксированы некоторые числа

$$\alpha_2, \dots, \alpha_q, \quad p_1, \dots, p_q, \quad \beta_{ij}, \quad 0 < j < i \leq q;$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y), \\ k_2(h) &= hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21}k_1(h)), \\ &\dots \\ k_q(h) &= hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1}k_1(h) + \dots + \beta_{q,q-1}k_{q-1}(h)), \end{aligned}$$

и полагаем

$$y(x+h) \approx z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h).$$

Рассмотрим вопрос о выборе параметров $\alpha_i, p_i, \beta_{ij}$. Обозначим

$$\varphi(h) = y(x+h) - z(h).$$

Если $f(x, y)$ — достаточно гладкая функция своих аргументов, то $k_1(h), \dots, k_q(h)$ и $\varphi(h)$ — гладкие функции параметра h . Предположим, что $f(x, y)$ настолько гладкая, что существуют производные $\varphi'(h), \dots, \varphi^{(s+1)}(h)$, а $\alpha_i, p_i, \beta_{ij}$ выбраны так, что

$$\varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0.$$

Кроме того, предположим, что существует некоторая гладкая функция $f_0(x, y)$, для которой соответствующее значение $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$. Согласно формуле Тейлора выполняется равенство

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1} = \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}. \quad (37.9)$$

где $0 < \theta < 1$. Величина $\varphi(h)$ называется погрешностью метода на шаге, а s — порядком погрешности метода. При $q = 1$ имеем

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x, y), \quad \varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(0) = (y'(x+h) - p_1 f(x, y))|_{h=0} = f(x, y)(1 - p_1),$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h);$$

здесь и далее $y = y(x)$. Равенство $\varphi'(0) = 0$ выполняется для всех гладких функций $f(x, y)$ лишь в случае $p_1 = 1$. Этому значению p_1 соответствует метод Эйлера. Для погрешности этого метода на шаге, согласно (37.9), получаем выражение

$$\varphi(h) = \frac{y''(x + \theta h) h^2}{2}.$$

Рассмотрим случай $q = 2$. Имеем

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x, y) - p_2 h f(\bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$\bar{x} = x + \alpha_2 h, \quad \bar{y} = y + \beta_{21} h f(x, y).$$

Вычислим производные функции $\varphi(h)$:

$$\varphi'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x, y) - p_2 f(\bar{x}, \bar{y}) - p_2 h (\alpha_2 f_x(\bar{x}, \bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x}, \bar{y}) f(x, y)),$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h) - 2p_2 (\alpha_2 f_x(\bar{x}, \bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x}, \bar{y}) f(x, y))$$

$$- p_2 h (\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 2\alpha_2 \beta_{21} f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) f(x, y) + \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) (f(x, y))^2),$$

$$\varphi'''(h) = y'''(x+h) - 3p_2 (\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 2\alpha_2 \beta_{21} f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) f(x, y) + \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) (f(x, y))^2) + O(h).$$

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y' = f, \quad y'' = f_x + f_y f, \quad y''' = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y y''.$$

Подставив в выражения $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$, $\varphi'''(h)$ значение $h = 0$ и воспользовавшись этими соотношениями, получим

$$\varphi(0) = y - y = 0,$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= (1 - p_1 - p_2)f(x, y), \\
\varphi''(0) &= (1 - 2p_2\alpha_2)f_x(x, y) + (1 - 2p_2\beta_{21})f_y(x, y)f(x, y), \\
\varphi'''(0) &= (1 - 3p_2\alpha_2^2)f_{xx}(x, y) + (2 - 6p_2\beta_{21})f_{xy}(x, y)f(x, y) \\
&\quad + (1 - 3p_2\beta_{21}^2)f_{yy}(x, y)(f(x, y))^2 + f_y(x, y)y''(x).
\end{aligned} \tag{37.10}$$

Соотношение $\varphi(0) = 0$ выполняется при всех $f(x, y)$, если

$$1 - p_1 - p_2 = 0; \tag{37.11}$$

соотношение $\varphi''(0) = 0$ выполняется, если

$$1 - 2p_2\alpha_2 = 0 \quad \text{и} \quad 1 - 2p_2\beta_{21} = 0. \tag{37.12}$$

Таким образом, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ при всех $f(x, y)$, если выполнены три указанных выше соотношения (37.11), (37.12), относительно четырёх параметров. Задавая произвольно один из параметров, получим различные методы Рунге–Кутты с погрешностью второго порядка малости по h . Например, при $p_1 = \frac{1}{2}$ получаем $p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$, что соответствует паре расчётных формул (1.10). При $p_1 = 0$ получаем $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, что соответствует паре расчётных формул (37.8).

В случае уравнения $y' = y$, согласно (37.10), имеем $\varphi'''(0) = y$ независимо от значений $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$. Отсюда следует, что нельзя построить формулы Рунге–Кутты со значениями $q = 2$ и $s = 3$.

В случае $q = 3$ расчётных формул, соответствующих значению $s = 4$, не существует. Наиболее употребительна совокупность расчётных формул при $q = s = 3$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\
k_3 &= hf(x + h, y - k_1 + 2k_2), \quad \Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).
\end{aligned}$$

При $q = 4, 5$ нельзя построить расчётных формул рассматриваемого вида со значением $s = 5$; при $q = s = 4$ наиболее употребительна совокупность расчётных формул:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\
k_4 &= hf(x + h, y + k_3), \quad \Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}$$

38 Пример метода Рунге–Кутты 4-го порядка

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Возьмём конкретное уравнение:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1.$$

Пусть шаг $h > 0$. Формула метода Рунге–Кутты 4-го порядка имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Подставляя $f(x, y) = x + y$, при $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, получаем:

$$k_1 = f(0, 1) = 1,$$

$$k_2 = f(0.05, 1.05) = 1.10,$$

$$k_3 = f(0.05, 1.055) = 1.105,$$

$$k_4 = f(0.1, 1.1105) = 1.2105.$$

Тогда

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6} (1 + 2 \cdot 1.10 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) \approx 1.125.$$

Таким образом,

$$y(0.1) \approx 1.125.$$

39 Контрольные вопросы

1. Что называется задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения?
2. В чём заключается идея метода Тейлора для численного решения ОДУ?
3. Как выводится разложение решения задачи Коши в ряд Тейлора?

4. Какие производные необходимо вычислять для построения метода Тейлора заданного порядка?
5. Как оценивается погрешность метода Тейлора?
6. В чём заключается идея методов Рунге–Кутты?
7. Как выводится метод Рунге–Кутты четвёртого порядка?
8. Что представляют собой коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 ?
9. Чем методы Рунге–Кутты отличаются от метода Тейлора?
10. Как определяется порядок точности метода Рунге–Кутты?

40 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*, Гостехиздат, Москва, 1953.
- [2] А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Численные методы*, Наука, Москва, 1989.
- [3] Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, Москва, 1978.
- [4] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1977.
- [5] A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [6] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Springer, Berlin, 2007.
- [7] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Wiley, Chichester, 2008.
- [8] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1993.

- [9] E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer, Berlin, 1996.
- [10] J. W. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Springer, New York, 1995.
- [11] L. N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*, SIAM, Philadelphia, 2013.

8-лекция. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель лекции – изучение методов численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В рамках курса студенты освоят метод конечных разностей и метод прогонки, приобретут навыки построения разностных схем, анализа их точности, устойчивости и сходимости, а также научатся применять эти методы для решения практических задач.

План лекции:

1. Постановка задачи
2. Метод конечных разностей
3. Метод прогонки
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

41 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение n -го порядка ($n \geq 2$)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (41.1)$$

Краевая задача для уравнения (41.1) заключается в следующем: найти решение $y = y(x)$ уравнения (41.1), для которого значения его производных

$$y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i), \quad (s = 0, 1, \dots, \sigma_i)$$

в заданной системе точек $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$; $k \geq 2$) удовлетворяют n независимым между собой краевым условиям, в общем случае нелинейным:

$$V_\nu(y_1, y'_1, \dots, y_1^{(\sigma_1)}, \dots, y_k, y'_k, \dots, y_k^{(\sigma_k)}) = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (41.2)$$

Так как в силу уравнения (41.1) производные $y^{(s)}$ порядка n и выше могут быть в общем случае выражены через искомую функцию y и её младшие производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то можно считать, что

$$\sigma_i \leq n - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k; \nu = 1, 2, \dots, n). \quad (41.3)$$

Краевая задача (41.1)–(41.2) часто встречается в приложениях. Приведём примеры конкретных краевых задач.

Пример 1. Простейшая двухточечная краевая задача. Найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (41.4)$$

и принимающую при $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) заданные значения

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую дифференциального уравнения (41.4), проходящую через данные точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$ (рисунок 1).

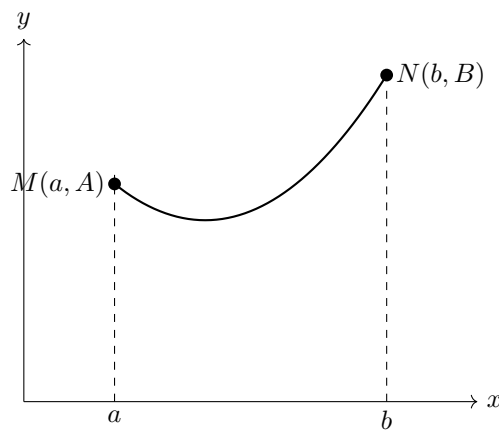


Рисунок 1

Пример 2. Видоизменением задачи, приведённой в примере 1, будет найти такое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (41.4), чтобы

$$y'(a) = A_1, \quad y'(b) = B_1.$$

Геометрически эта задача сводится к отысканию интегральной кривой уравнения (41.4), пересекающей прямые $x = a$ и $x = b$ под заданными соответственно углами α и β такими, что

$$\tan \alpha = A_1, \quad \tan \beta = B_1$$

(Рисунок 2).

Пример 3. Можно рассмотреть также смешанную краевую задачу: найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (41.4), удовлетворяющее условиям

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B_1.$$

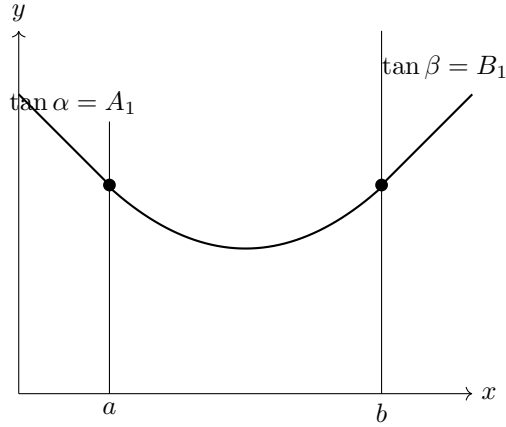


Рисунок 2

Иными словами, требуется найти интегральную кривую уравнения (41.4), проходящую через заданную точку $M(a, A)$ и пересекающую прямую $x = b$ под данным углом β , где

$$\tan \beta = B_1$$

(рисунок 3).

Заметим, что общая краевая задача (41.1)–(41.2) может:

- (а) не иметь решений;
- (б) иметь единственное решение;
- (в) иметь несколько и даже бесконечно много решений.

Пример 4. Краевая задача

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \quad (5)$$

имеет бесконечно много решений вида

$$y = c \sin x,$$

где c — произвольная постоянная.

Краевая задача

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 1, \quad 0 < b < \pi$$

имеет единственное решение

$$y_b = \frac{\sin x}{\sin b},$$

а при $b = \pi$ совсем не имеет решений (рисунок 3).

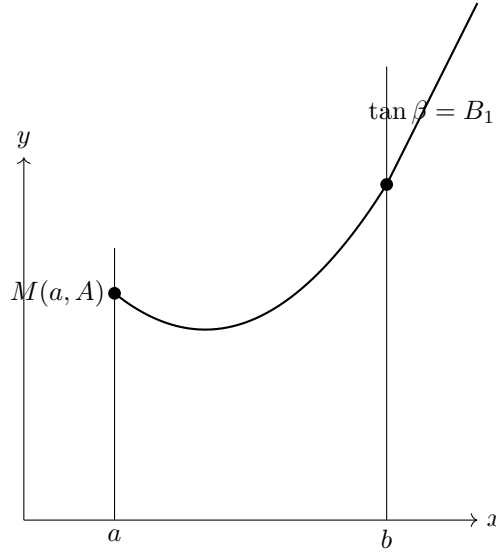


Рисунок 3

42 Метод конечных разностей

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (42.1)$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \quad (42.2)$$

$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0),$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Одним из наиболее простых методов решения этой краевой задачи является сведение ее к системе конечно-разностных уравнений. Для этого разобьем основной отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины h (шаг), где

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Точки разбиения имеют абсциссы:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Значения в точках деления x_i искомой функции $y = y(x)$ и её производных $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$

обозначим соответственно через

$$y_i = y(x_i), \quad y'_i = y'(x_i), \quad y''_i = y''(x_i).$$

Введём также обозначения:

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

Заменяя производные симметричными конечно-разностными отношениями для внутренних точек x_i отрезка $[a, b]$, будем иметь

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (42.3)$$

Для конечных точек $x_0 = a$ и $x_n = b$, чтобы не выходить за пределы отрезка $[a, b]$, можно положить

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \quad (42.4)$$

Однако если функция $y = y(x)$ достаточно гладкая, то более точные значения дают формулы

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad (42.5)$$

$$y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}, \quad n \geq 2. \quad (42.6)$$

Действительно, используя формулу Тейлора:

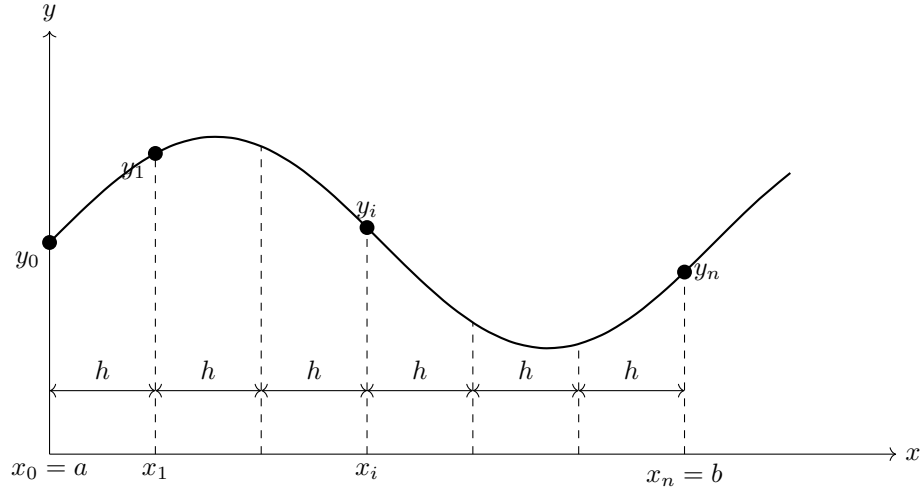
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 + \frac{h^3}{6}y'''_0 + \dots, \\ y_2 &= y_0 + 2hy'_0 + \frac{(2h)^2}{2}y''_0 + \frac{(2h)^3}{6}y'''_0 + \dots, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = y'_0 + O(h^2),$$

где $O(h^2)$ — величина порядка h^2 . Аналогично

$$\frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = y'_n + O(h^2).$$



Во внутренних точках $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) приближенно можно заменить линейной системой уравнений:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (42.7)$$

Кроме того, в силу формул (42.5) и (42.6), краевые условия (42.2) дополнительно дают ещё два уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (42.8)$$

Таким образом получена линейная система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, \dots, y_n$, представляющими значения искомой функции $y = y(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Решив эту систему, получим табличные значения функции y .

Пример 1. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи:

$$\begin{cases} y'' + (1+x^2)y = -1, \\ y(-1) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (42.9)$$

Механически уравнение представляет собой дифференциальное уравнение для изгибающего момента некоторого бруса с переменным поперечным сечением и шарнирно закреплёнными концами.

Для грубого решения выберем шаг $h = \frac{1}{2}$. Полагая $x_2 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, ввиду симметрии будем иметь $y_{-2} = y_2 = 0$, $y_{-1} = y_1$. Таким образом, нужно определить лишь две ординаты y_0 и y_1 . При $x = 0$:

$$\frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{(1/2)^2} + y_0 = -1, \quad \text{где } y_{-1} = y_1.$$

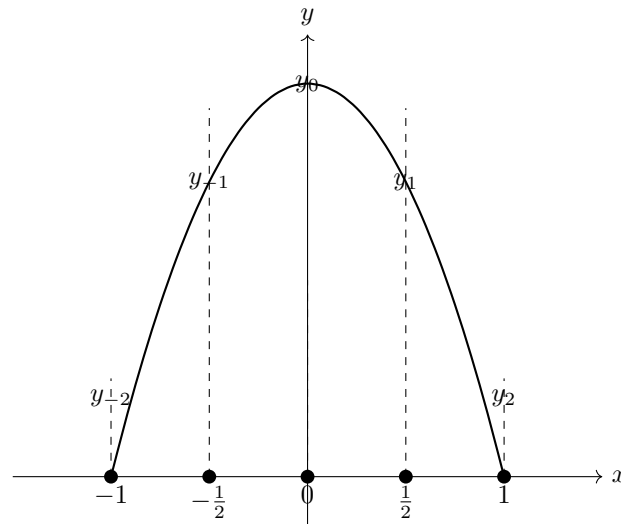
При $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(1/2)^2} + \left(1 + \frac{1}{4}\right) y_1 = -1.$$

С учётом $y_2 = 0$ получаем систему:

$$-7y_0 + 8y_1 = -1, \quad 4y_0 - \frac{27}{4}y_1 = -1.$$

Откуда $y_0 \approx 0.967$, $y_1 \approx 0.721$.



43 Метод прогонки

При применении метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка получается «трёхчленная система» линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан специальный метод, получивший название метод прогонки.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{43.1}$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= A, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= B, \end{aligned} \tag{43.2}$$

при предположении, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

От дифференциального уравнения (43.1) обычным приёмом переходим к конечно-разностному уравнению. Для этого разобьём отрезок $[a, b]$ на n равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Пусть

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

и введём обозначения:

$$p(x_i) = p_i, \quad q(x_i) = q_i, \quad f(x_i) = f_i, \quad y(x_i) = y_i.$$

Для внутренних точек x_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, получаем систему конечно-разностных уравнений:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (43.3)$$

После преобразований система имеет вид

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (43.4)$$

где

$$m_i = -2 + q_i h^2, \quad n_i = 1 - \frac{p_i h}{2}, \quad 1 + \frac{p_i h}{2}.$$

Для производных на концах $x_0 = a$ и $x_n = b$ используем односторонние производные:

$$y'_0 \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Тогда согласно граничным условиям (43.2) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B. \end{aligned} \quad (43.5)$$

Линейная система (43.3), (43.5) состоит из $n+1$ уравнений первой степени относительно неизвестных $y_0, y_1, \dots, y_n$. Эту систему можно решить обычным способом. Однако мы сейчас укажем другой, более короткий путь, получивший название метода прогонки.

Разрешая уравнение (43.3) относительно y_i , будем иметь

$$y_i = \frac{\hat{f}_i}{m_i} h^2 - \frac{1}{m_i} y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i} y_{i-1}. \quad (43.6)$$

Предположим, что с помощью полной системы (43.3), (43.5) из уравнения (43.6) исключена неизвестная y_{i-1} . Тогда это уравнение примет вид

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}), \quad (43.7)$$

где c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) — некоторые коэффициенты. Отсюда

$$y_{i-1} = c_{i-1}(d_{i-1} - y_i).$$

Подставляя это выражение в уравнение (43.3), получим

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}(d_{i-1} - y_i) = \hat{f}_i h^2,$$

и, следовательно,

$$y_i = \frac{\hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \quad (43.8)$$

Сравнивая формулы (43.7) и (43.8), получим для определения c_i и d_i рекуррентные формулы:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad d_i = \hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}, \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (43.9)$$

Определим теперь c_0 и d_0 . Из первого краевого условия (43.5) получаем

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}.$$

С другой стороны, из формулы (43.7) при $i = 0$ имеем

$$y_0 = c_0(d_0 - y_1). \quad (43.10)$$

Сравнивая последние два равенства, находим

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \quad (43.11)$$

На основании формул (43.9), (43.11) последовательно определяются коэффициенты c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) до c_{n-1} и d_{n-1} включительно (прямой ход).

Обратный ход начинается с определения y_n . Используя второе краевое условие (43.5) и формулу (43.7) при $i = n-1$, получим систему двух уравнений:

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B, \quad y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \quad (43.12)$$

Решая ее относительно y_n , будем иметь

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)}. \quad (43.13)$$

Теперь по формуле (43.7) последовательно находим

$$y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \dots, y_0.$$

Для контроля можно проверить выполнение первого краевого условия. Вычисления удобно расположить в виде таблицы.

i	0	1	2	$\dots$	$n-1$	n
c_i	$c_0(11)$	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-1}	
d_i	$d_0(11)$	d_1	d_2	$\dots$	d_{n-1}	
x_i	$x_0 = a$	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	$x_n = b$
y_i	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_{n-1}	$y_n(13)$

Для простейших краевых условий $y(a) = A$, $y(b) = B$ формулы для c_0 , d_0 , y_0 и y_n упрощаются. А именно, полагая

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0,$$

из формул (2.2) будем иметь:

$$c_0 = 0, \quad d_0 = \infty, \quad c_0 d_0 = A.$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{1}{m_1}, \quad d_1 = \hat{f}_1 h^2 - n_1 A. \quad (43.14)$$

причем

$$y_n = B, \quad y_0 = A. \quad (43.15)$$

Заметим, что метод прогонки обладает устойчивым вычислительным алгоритмом, т.е. ошибки округления не вызывают неограниченного возрастания погрешности решения.

Пример 1. Методом прогонки решить краевую задачу

$$y'' = x + y, \quad (43.16)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (43.17)$$

Решение. Примем $h = 0,1$ и от уравнения (43.16) и краевых условий (43.17) перейдем к соответствующим конечно-разностным уравнениям:

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \hat{f}_i h^2, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad y_0 = 0, \quad y_{10} = 0.$$

где $m_i = -2 - h^2$, $n_i = 1$, $f_i = x_i = ih$. Согласно формулам (43.14) имеем $c_1 = -0,498$, $d_1 = 0,001$.

Формулы (43.9) в нашем случае дают:

$$c_i = \frac{1}{-2 - h^2 - c_{i-1}}, \quad d_i = ih^3 - c_{i-1} d_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Найденные значения c_i и d_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) записываем в первых двух строках таблицы 1. Затем, используя формулу (1.27) и известное значение $y_{10} = 0$, вычисляем $y_9, y_8, \dots, y_1$.

Для сравнения в последней строке таблицы 1 даны значения точного решения

$$\tilde{y} = \frac{2e}{e^2 - 1} \sinh x - x.$$

Таблица 1

Решение краевой задачи (43.16)–(43.17) методом прогонки

i	0	1	2	3	4	5
c_i	0	−0,498	−0,662	−0,878	−0,890	−0,900
d_i		0,001	0,002	0,004	0,008	0,012
y_i	0	−0,025	−0,049	−0,072	−0,078	−0,081
$\tilde{y}_i$	0	−0,015	−0,029	−0,041	−0,050	−0,057

Продолжение таблицы 1

i	6	7	8	9	10
c_i	−0,908	−0,915	−0,921	−0,926	
d_i	0,016	0,022	0,028	0,035	
y_i	−0,078	−0,070	−0,055	−0,032	0
$\tilde{y}_i$	−0,058	−0,054	−0,044	−0,026	0

44 Контрольные вопросы

1. Что такое краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка? Приведите пример.
2. В чём заключается метод конечных разностей для решения краевых задач?
3. Как строится разностная аппроксимация второй производной?
4. Какие типы граничных условий существуют и как они учитываются в разностных схемах?
5. Опишите алгоритм метода прогонки (метод трёхдиагональной матрицы) для решения линейных краевых задач.
6. Что понимается под устойчивостью разностной схемы и как её проверить?

45 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1-8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Collatz, C. 1953. Chislennyye Metody Resheniya Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter II.
- [2] Milne, W. E. 1955. Chislennoye Resheniye Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter VII.
- [3] Elsgolts, L. E. 1954. Variatsionnoe Ischislenie. Moscow: Gostekhizdat.
- [4] Mikhlin, S. G. 1957. Variatsionnye Metody v Matematicheskoy Fizike. Moscow: Gostekhizdat, Chapters III, V, IX.
- [5] Tolstov, G. P. 1960. Ryady Fur'e. 2nd ed. Moscow: Fizmatgiz, Chapter II.
- [6] Polozhiy, G. N., et al. 1960. Matematicheskiy Praktikum. Moscow: Fizmatgiz.
- [7] Lokutsievsky, O. V. 1956. "Uspekhi Matematicheskikh Nauk." 11, no. 3 (69).
- [8] Lance, J. N. 1962. Chislennyye Metody dlya Byistrodeystvuyushchikh Vycheslitel'nykh Mashin. Moscow: IL.

9-лекция. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель лекции – изучение численных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках курса студенты освоят метод коллокации, метод наименьших квадратов и метод Галеркина, приобретут навыки построения аппроксимационных схем, анализа их точности, устойчивости и сходимости, а также научатся применять эти методы для решения практических задач математической физики и инженерии.

План лекции:

1. [Метод коллокации](#)
2. [Метод наименьших квадратов](#)
3. [Метод Галеркина](#)
4. [Контрольные вопросы](#)
5. [Список литературы](#)

46 Метод коллокации

Изложенный выше метод конечных разностей для решения краевых задач носит численный характер и позволяет получить таблицу значений искомой функции. Сейчас рассмотрим метод, дающий возможность найти приближенное решение краевой задачи в виде аналитического выражения.

Пусть требуется определить функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (46.1)$$

и линейным краевым условиям

$$\Gamma_a[y] = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A, \quad \Gamma_b[y] = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B, \quad (46.2)$$

где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Выберем некоторую совокупность линейно независимых функций (базисные функции)

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \quad (46.3)$$

где функция $u_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B, \quad (46.4)$$

а остальные функции $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соответствующим однородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_i] = 0, \quad \Gamma_b[u_i] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (46.5)$$

Если краевые условия (46.2) однородны ($A = B = 0$), то можно положить $u_0(x) = 0$ и рассматривать лишь систему функций $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Будем искать приближенное решение краевой задачи (46.1)–(46.2) в виде линейной комбинации базисных функций:

$$y \approx u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (46.6)$$

где c_i — неизвестные коэффициенты. Очевидно, что функция y удовлетворяет краевым условиям (46.2).

В самом деле, в силу линейности краевых условий имеем

$$\Gamma_a[y] = \Gamma_a[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i \Gamma_a[u_i] = A + 0 = A,$$

$$\Gamma_b[y] = \Gamma_b[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i \Gamma_b[u_i] = B + 0 = B.$$

Подставляя выражение (46.6) в дифференциальное уравнение (46.1), получаем остаток:

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L[y] - f(x) = L\left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x)\right] - f(x) = L[u_0](x) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_i L[u_i](x), \quad (46.7)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Если при некотором выборе коэффициентов C_i выполнено равенство

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad \text{при } a \leq x \leq b,$$

то функция y является точным решением краевой задачи (46.1)–(46.2). Однако подобрать такие коэффициенты практически невозможно. Поэтому ограничиваются тем, чтобы функция $R(x, C_1, \dots, C_n)$ обращалась в нуль в заданной достаточно густой системе точек $x_1, x_2, \dots, x_m \in (a, b]$ — точках коллокации, в которых дифференциальное уравнение (46.1) будет выполнено точно. В качестве точек коллокации, например, выбирают точки, делящие отрезок $[a, b]$ на равные части. В результате получаем систему линейных уравнений:

$$R(x_1, C_1, \dots, C_n) = 0, \quad R(x_2, C_1, \dots, C_n) = 0, \dots \quad (46.8)$$

Из системы (1.8) в случае её совместности обычным способом определяют коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_n$, после чего приближенное решение краевой задачи дается формулой (46.6).

Пример. Решить методом коллокации краевую задачу [1]:

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0, \quad y(\pm 1) = 0. \quad (46.9)$$

Решение. В качестве базисных функций выберем полиномы

$$u_n(x) = x^2 - 3(1 - x^2), \quad n = 1, 2, \dots,$$

очевидно, удовлетворяющие краевым условиям $u_n(\pm 1) = 0$. За точки коллокации возьмем $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$. Ограничиваясь двумя базисными функциями, положим

$$y \approx C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4).$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (46.9) даёт:

$$R(x) = -2C_1 + C_2(2 - 12x^2) + (1 + x^2)[C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4)] + 1. \quad (46.10)$$

В точках коллокации $x_0 = 0$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ имеем $R(x_0) = 0$, $R(x_1) = 0$. Отсюда получается система линейных уравнений для определения коэффициентов C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 = 0, \\ \text{(второе уравнение из } R(x_1) = 0) \end{cases} \quad (46.11)$$

Решив систему, находим $C_1 = 0.957$, $C_2 = 0.022$. Следовательно, приближенное решение:

$$y(x) \approx 0.957(1 - x^2) + 0.022(x^2 - x^4).$$

Итак, получаем приближенное решение методом коллокации:

$$y(x) \approx 0.957(1 - x^2) - 0.022(x^2 - x^4) = 0.957 - 0.979x^2 + 0.022x^4. \quad (46.12)$$

В частности, имеем

$$y(0) \approx 0.957.$$

Для сравнения приводим соответствующее значение $y(0)$, полученное методом конечных разностей (см. 8-лекция):

$$y(0) = y_0 \approx 0.967.$$

47 Метод наименьших квадратов

Снова рассмотрим краевую задачу

$$L[y] = f(x), \quad \Gamma_a[y] = A, \quad \Gamma_b[y] = B, \quad (47.1)$$

где смысл сокращённых обозначений был установлен в предыдущем параграфе.

Придерживаясь обозначений в разделе 46, положим

$$y \approx u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x), \quad (47.2)$$

где функции $u_0(x)$ и $u_i(x)$ таковы, что

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B, \quad \Gamma_a[u_i] = 0, \quad \Gamma_b[u_i] = 0, \quad i > 0.$$

Подставляя выражение (47.2) в дифференциальное уравнение (47.1), получаем невязку:

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L\left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x)\right] - f(x) = L[u_0](x) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_i L[u_i](x), \quad (47.3)$$

которую необходимо сделать как можно меньше по абсолютной величине на интервале $[a, b]$. Для этого вводят функционал

$$J(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_a^b R^2(x, C_1, \dots, C_n) dx \rightarrow \min, \quad (47.4)$$

что и является интегральным методом наименьших квадратов. Условие минимума функционала J даёт систему уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial C_j} = 2 \int_a^b R(x, C_1, \dots, C_n) L[u_j](x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (47.5)$$

В результате получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов $C_1, C_2, \dots, C_n$, из которой определяются эти коэффициенты.

Пример. Решить интегральным методом наименьших квадратов краевую задачу, разобрannую в разделе 46:

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0, \quad y(\pm 1) = 0. \quad (47.6)$$

Решение. Полагаем в качестве базисных функций:

$$u_1(x) = 1 - x^2, \quad u_2(x) = x^2 - x^4.$$

Тогда приближенное решение записываем в виде:

$$y(x) \approx C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4). \quad (47.7)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, получаем невязку (см. формулу (46.10)):

$$R(x) = 1 - (1 + x^4)C_1 + (2 - 11x^2 - x^8)C_2. \quad (47.8)$$

Ввиду симметрии задачи достаточно рассматривать отрезок $[0, 1]$. Согласно интегральному методу наименьших квадратов, составляем функционал

$$J(C_1, C_2) = \int_0^1 R^2(x) dx \rightarrow \min \quad (47.9)$$

и подбираем коэффициенты C_1 и C_2 так, чтобы интеграл имел наименьшее значение. Это даёт систему уравнений:

$$\int_0^1 (1 - x^4) R(x) dx = 0, \quad \int_0^1 (2 - 11x^2 - x^6) R(x) dx = 0. \quad (47.10)$$

Решая эту систему, получаем:

$$C_1 \approx 0.985, \quad C_2 \approx -0.078.$$

Следовательно, приближённое решение:

$$y(x) \approx 0.985(1 - x^2) - 0.078(x^2 - x^4). \quad (47.11)$$

В частности $y(0) \approx 0.985$ (для сравнения см. в разделе 46).

48 Метод Галеркина

Метод Галеркина основан на одной теореме из теории общих рядов Фурье.

Теорема 48.1. Пусть $\{u_n(x)\}$ — полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна на отрезке $[a, b]$ ко всем функциям $u_n(x)$, т.е.

$$\int_a^b f(x)u_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (48.1)$$

то

$$f(x) = 0 \quad \text{при } a < x < b. \quad (48.2)$$

Доказательство. Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$ относительно заданной системы ортогональных функций:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(x), \quad (48.3)$$

где коэффициенты Фурье определяются формулой

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x)u_n(x) dx}{\int_a^b [u_n(x)]^2 dx}, \quad \|u_n\|^2 = \int_a^b [u_n(x)]^2 dx > 0. \quad (48.4)$$

В силу условия (48.1) имеем

$$C_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (48.5)$$

Для полной системы $\{u_n(x)\}$ по отношению к любой непрерывной функции $f(x)$ выполнено равенство полноты:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \|u_n\|^2. \quad (48.6)$$

Отсюда, учитывая равенство (48.3), получаем:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0, \quad (48.7)$$

и, следовательно,

$$f(x) = 0 \quad \text{при } a < x < b. \quad (48.8)$$

□

Ескерту 48.1. Из формулы (48.4) вытекает, что если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна конечной системе функций $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$ (т.е. $C_0 = C_1 = \dots = C_N = 0$), то

$$\int_a^b f^2(x) dx \approx \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n^2 \|u_n\|^2,$$

и при достаточно большом N интеграл будет мал. В этом случае функция $f(x)$ в среднем на отрезке $[a, b]$ будет сколь угодно мала. При дополнительных ограничениях отсюда следует, что $|f(x)|$ также мала на всём отрезке $[a, b]$.

Перейдём теперь к изложению метода Галеркина. Пусть имеется линейная краевая задача

$$L[y] = f(x), \quad (48.9)$$

где

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y,$$

при наличии линейных краевых условий

$$\Gamma_a[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b[y] = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (48.10)$$

где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$. Выберем конечную систему базисных функций $\{u_i(x)\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, составляющую часть некоторой полной системы, причём функция $u_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B,$$

а функции $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют однородным краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_i] = 0, \quad \Gamma_b[u_i] = 0.$$

Приближенное решение краевой задачи (48.5)–(48.7) ищем в виде:

$$y(x) \approx u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x), \quad (48.11)$$

где C_i — неизвестные коэффициенты. При таком подборе базисных функций $u_i(x)$ функция $y(x)$, определяемая формулой (48.7), очевидно удовлетворяет краевым условиям (48.6) при любом выборе коэффициентов C_i . Подставив выражение (48.7) в дифференциальное уравнение (48.5), получаем невязку:

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L\left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x)\right] - f(x) = L[u_0](x) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_i L[u_i](x). \quad (48.12)$$

Для точного решения краевой задачи функция $R(x) = 0$; поэтому для получения приближённого решения, близкого к точному, необходимо подобрать коэффициенты C_i так, чтобы функция $R(x)$ была «малой» в некотором смысле. Согласно методу Галеркина, требуется, чтобы невязка $R(x)$ была ортогональна базисным функциям $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. При достаточно большом числе этих функций, в силу приведённого выше замечания, это обеспечивает малость невязки в среднем. Насколько это приближённое решение близко к точному, в общем случае остаётся открытым вопросом. Таким образом, для определения коэффициентов C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) получаем систему линейных уравнений:

$$\int_a^b u_1(x) R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx = 0, \quad (48.13)$$

$$\int_a^b u_2(x) R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx = 0, \quad (48.14)$$

⋮

$$\int_a^b u_n(x) R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx = 0, \quad (48.15)$$

или, более подробно,

$$\int_a^b L[u_i](x) dx = \int_a^b u_i(x) \left[f(x) - L\left[u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x)\right] \right] dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (48.16)$$

Достаточные условия сходимости метода Галеркина приведены в книге Михлина [4].

Пример. Методом Галеркина найти приближённое решение уравнения

$$y'' + xy + y = 2x, \quad (48.17)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0. \quad (48.18)$$

Решение. В качестве системы базисных функций $u_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) выбираем:

$$u_0(x) = 1 - x, \quad u_1(x) = x(1 - x), \quad u_2(x) = x^2(1 - x), \quad u_3(x) = x^3(1 - x).$$

Приближённое решение ищем в виде:

$$y(x) \approx u_0(x) + C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + C_3 u_3(x) = (1 - x) + C_1 x(1 - x) + C_2 x^2(1 - x) + C_3 x^3(1 - x). \quad (48.19)$$

Подставляя $y(x)$ в левую часть дифференциального уравнения (48.8), получаем невязку:

$$\begin{aligned} R(x, C_1, C_2, C_3) &= (1 - 4x) + C_1(-2 + 2x - 3x^2) \\ &\quad + C_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + C_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4). \end{aligned} \quad (48.20)$$

Условия ортогональности функции $R(x, C_1, C_2, C_3)$ к базисным функциям $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ приводят к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - x^2) R(x, C_1, C_2, C_3) dx &= 0, \\ \int_0^1 (x^2 - x^3) R(x, C_1, C_2, C_3) dx &= 0, \\ \int_0^1 (x^3 - x^4) R(x, C_1, C_2, C_3) dx &= 0. \end{aligned} \quad (48.21)$$

Подставляя вместо $R(x)$ его значение (см. формулу (46.10)) и выполняя интегрирование, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 133C_1 + 63C_2 + 36C_3 &= -70, \\ 140C_1 + 108C_2 + 79C_3 &= -98, \\ 264C_1 + 252C_2 + 211C_3 &= -210. \end{aligned} \quad (48.22)$$

Решая эту систему, получаем:

$$C_1 \approx -0.2090, \quad C_2 \approx -0.7894, \quad C_3 \approx 0.2090.$$

Следовательно, приближённое решение задачи:

$$y(x) \approx (1 - x)(1 - 0.2090x - 0.7894x^2 + 0.2090x^3). \quad (48.23)$$

49 Контрольные вопросы

1. Что такое краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения? Приведите пример.
2. В чём заключается суть метода коллокации для решения краевых задач?
3. Как выбираются точки коллокации, и какое влияние это оказывает на точность метода?
4. В чём принцип метода наименьших квадратов при аппроксимации решения?
5. Как формулируется функционал для метода Галеркина и как выбираются тестовые функции?
6. Какие условия должны выполняться для сходимости метода Галеркина?
7. В чём отличие методов коллокации и Галеркина по выбору аппроксимационных и тестовых функций?
8. Какие критерии точности и устойчивости применяются при численных решениях краевых задач?
9. Приведите пример практической задачи, где эффективно применяются методы коллокации, наименьших квадратов или Галеркина.

50 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Collatz, C. 1953. Chislennye Metody Resheniya Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter II.
- [2] Milne, W. E. 1955. Chislennoye Resheniye Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter VII.
- [3] Elsgolts, L. E. 1954. Variatsionnoe Ischislenie. Moscow: Gostekhizdat.
- [4] Mikhlin, S. G. 1957. Variatsionnye Metody v Matematicheskoy Fizike. Moscow: Gostekhizdat, Chapters III, V, IX.
- [5] Tolstov, G. P. 1960. Ryady Fur'e. 2nd ed. Moscow: Fizmatgiz, Chapter II.

- [6] Polozhiy, G. N., et al. 1960. Matematicheskiy Praktikum. Moscow: Fizmatgiz.
- [7] Lokutsievsky, O. V. 1956. "Uspekhi Matematicheskikh Nauk." 11, no. 3 (69).
- [8] Lance, J. N. 1962. Chislennye Metody dlya Byistrodeystvuyushchikh Vycheslitel'nykh Mashin. Moscow: IL.

10-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных сеточными методами. Параболические уравнения

Цель лекции — изучение численных методов решения уравнений параболического типа. В рамках курса студенты освоят метод сеток (конечно-разностные схемы), научатся строить аппроксимации для начально-краевых задач, анализировать их точность, устойчивость и сходимость, а также применять полученные методы для численного решения задач математической физики и инженерии.

План лекции:

1. Метод сеток для уравнения параболического типа
2. Устойчивость конечно-разностной схемы для решения уравнения теплопроводности
3. Метод прогонки для уравнения теплопроводности
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

51 Метод сеток для уравнения параболического типа

В качестве примера уравнения параболического типа остановимся на уравнении теплопроводности для однородного стержня $0 \leq x \leq l$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (51.1)$$

где $u = u(x, t)$ — температура и t — время. В дальнейшем для простоты будем полагать $a = 1$ (к такому случаю всегда можно прийти путем введения нового времени $\tau = a^2 t$).

Итак, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (51.2)$$

Пусть, кроме того, в начальный момент времени $t = 0$ задано распределение температуры

$$u(x, 0) = f(x),$$

и законы изменения температуры (режимы) на концах стержня $x = 0$ и $x = l$:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t).$$

Требуется найти распределение температуры $u = u(x, t)$ вдоль стержня в любой момент времени t . Решим эту смешанную задачу методом сеток [6, 7].

Для этого рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x, t\}$ (рисунок 1).

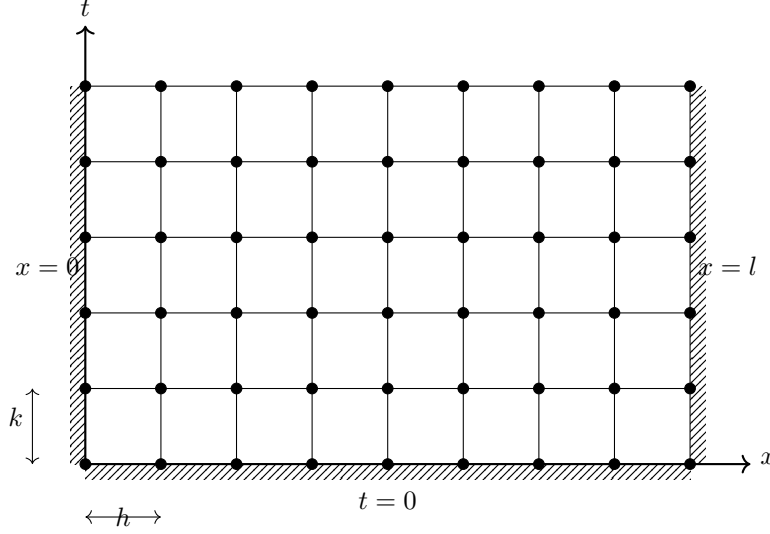


Рис. 2: Прямоугольная сетка в области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$

В полуполосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$ построим прямоугольную сетку:

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad t_j = jk \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$h = \frac{l}{n} \quad (n - \text{целое}), \quad k = \sigma h^2 \quad (\sigma - \text{постоянная})$$

— шаг вдоль оси Ox и шаг вдоль оси Ot соответственно.

Введем обозначения:

$$x_i = ih, \quad t_j = jk, \quad u_{ij} = u(x_i, t_j).$$

Заменяя уравнение (51.2) конечно-разностным уравнением, будем иметь:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\sigma h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (51.3)$$

Отсюда

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma u_{i+1,j}. \quad (51.4)$$

Из рассмотрения формулы (51.4) ясно, что, зная значения функции $u(x, t)$ в точках j -го слоя $t = t_j$ с помощью этой формулы можно вычислить значения $u(x, t)$ в точках следующего $(j+1)$ -го слоя $t = t_{j+1}$ (рисунок 2). При вычислении пользуются четырьмя соседними узлами — явная схема вида (схема 1).

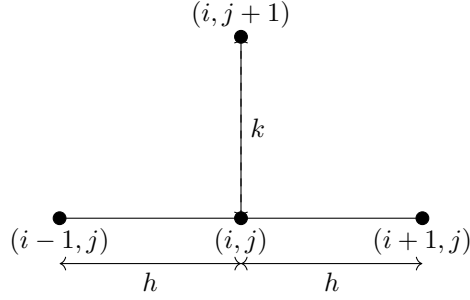


Рис. 3: Схема 1

Таким образом, исходя из начального слоя $t = 0$, значения $u(x, t)$ для которого определяются из начального условия

$$u(x_i, 0) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

и используя значения функции $u(x, t)$ в крайних узлах $(0, t_j)$, (l, t_j) ($j = 0, 1, \dots$), определяемые граничными условиями

$$u(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad u(l, t_j) = \psi(t_j),$$

по формуле (51.4) последовательно вычисляем:

$$u(x_i, t_1), u(x_i, t_2), u(x_i, t_3), \dots \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

т.е. находим значения искомой функции $u(x, t)$ во всех узлах полуполосы. Остается разумно выбрать величину σ . При этом будем исходить из требования, чтобы ошибка при замене дифференциального уравнения (51.2) конечно-разностным уравнением (51.3) была наименьшей. Введем обозначения:

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\sigma}(u_{i,j+1} - u_{ij}),$$

где $L_h(u)$ — конечно-разностный оператор, соответствующий дифференциальному оператору $L[u]$. Разность

$$R_h[u] = L_h[u] - L[u],$$

называемая ошибкой аппроксимации, есть та погрешность, которая получается при замене оператора $L[u]$ оператором $L_h[u]$. Вычислим эту погрешность в узлах (x_i, t_j) сетки для функции $u(x, t)$, являющейся решением уравнения (51.2). При этом $L[u] = 0$, и

$$R_h[u] = L_h[u]. \quad (51.5)$$

Учитывая, что

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j), \quad u_{i-1,j} = u(x_i - h, t_j), \quad u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + \sigma h^2),$$

Разлагая $L_h[u]$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_i, t_j) , ограничиваясь членами порядка h^6 , находим:

$$\begin{aligned} L_h[u] = & \frac{1}{h^2} \left\{ \left(u_{ij} + h \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} \right. \right. \\ & + \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{ij}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} \left. \right) - 2u_{ij} \\ & + \left(u_{ij} - h \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} \right. \\ & \left. \left. - \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{ij}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{\sigma} \left[\left(u_{ij} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} \sigma h^2 + \frac{(\sigma h^2)^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2} + \frac{(\sigma h^2)^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3} \right) - u_{ij} \right] \\ & + O(h^6). \end{aligned}$$

Отсюда после приведения подобных членов будем иметь:

$$L_h[u] = \left(\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} - \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} \right) + h^2 \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2} \right) + h^4 \left(\frac{1}{360} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} - \frac{\sigma^2}{6} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3} \right) + O(h^6). \quad (51.6)$$

Так как $u(x, t)$ есть решение уравнения (51.2), то

$$\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} = \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3}.$$

Заменяя в (51.6) частные производные по t равными им частными производными по x , получаем:

$$L_h[u] = h^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} + h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O(h^6). \quad (51.7)$$

Выберем число σ так, чтобы первая скобка в (51.7) обратилась в нуль, т.е. положим $\sigma/2 = 1/12$, следовательно, $\sigma = 1/6$. При этом значении σ будем иметь:

$$L_h[u] = h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{216} \right) \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O(h^6) = -\frac{h^4}{540} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O(h^6).$$

В силу (51.5) выполнено равенство $R_h[u] = L_h[u]$. Поэтому при таком выборе σ для погрешности получаем оценку

$$R_h[u] = O(h^4),$$

тогда как при другом выборе σ имеем $R_h[u] = O(h^2)$. В этом смысле значение $\sigma = 1/6$ является для расчетной схемы наилучшим.

Соответствующая расчетная формула (51.4) при таком выборе σ окончательно принимает вид:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}). \quad (51.8)$$

Отметим, что оценка ошибки аппроксимации $R_h[u]$ в общем случае для граничных узлов (x_i, t_j) не годится.

Пример. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Решение. Заметим, что начальные и краевые условия задачи симметричны относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. Поэтому и решение $u(x, t)$ будет симметрично относительно этой прямой. Для расчетов полагаем $h = \frac{1}{10}$ и, следовательно, $k = \frac{h^2}{6} = \frac{1}{600}$ и строим систему узлов (x_i, t_j) , где $x_i = 0.1i$, $t_j = \frac{j}{600}$. Результаты вычислений удобно расположить в прямоугольной таблице.

Таблица 1: Решение уравнения теплопроводности методом сеток

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.360	0.640	0.840	0.960	1.000	0.960	0.840	0.640	0.360	0
1	0	0.347	0.627	0.827	0.947	0.987	0.947	0.827	0.627	0.347	0
2	0	0.336	0.613	0.813	0.933	0.973	0.933	0.813	0.613	0.336	0
3	0	0.326	0.600	0.800	0.920	0.960	0.920	0.800	0.600	0.326	0
4	0	0.317	0.588	0.787	0.907	0.947	0.907	0.787	0.588	0.317	0
5	0	0.309	0.576	0.774	0.894	0.934	0.894	0.774	0.576	0.309	0
6	0	0.302	0.564	0.761	0.881	0.921	0.881	0.761	0.564	0.302	0

Начальная строка этой таблицы ($j = 0$) заполняется на основании заданных начальных условий:

$$u(x_i, 0) = 4x_i(1 - x_i) = 0.4i(1 - 0.1i), \quad (i = 0, 1, \dots, 10).$$

В первый ($i = 0$) и последний ($i = 10$) столбцы вписываются данные граничных условий:

$$u(0, t_j) = u(1, t_j) = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Остальные строки таблицы последовательно заполняются с помощью применения расчетной формулы. При этом, конечно, следует учитывать симметрию искомой функции u .

52 Устойчивость конечно-разностной схемы для решения уравнения теплопроводности

При использовании конечно-разностной схемы для решения краевой задачи возникает важный вопрос об устойчивости такой схемы. Под этим понимается следующее: конечно-разностная схема называется *устойчивой*, если малые погрешности, допущенные в процессе решения, затухают или во всяком случае остаются малыми при неограниченном увеличении номера текущего слоя (строгое определение понятия устойчивости см. в [8]). В противном случае схема называется *неустойчивой*. Ясно, что неустойчивая конечно-разностная схема противопоказана для вычислений, так как неизбежные незначительные ошибки, например погрешности округлений, могут создать большие отклонения от точного решения краевой задачи и привести к результатам, не имеющим ничего общего с действительностью.

Выясним условия устойчивости приведённой выше конечно-разностной схемы (раздел 51, (51.4)) для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (52.1)$$

с заданными граничными и начальными условиями (смешанная краевая задача):

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = \varphi(t), \\ u(l, t) = \psi(t). \end{cases} \quad (52.2)$$

Пусть $\Delta x_i = h$ и $\Delta t_j = k$, где $h = \frac{l}{n}$, $k = \sigma h^2$. Переходя к конечным разностям в уравнении (52.1) (раздел 51), будем иметь

$$\sigma u(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)u(x_i, t_j) + \sigma u(x_i - h, t_j) - u(x_i, t_j + k) = 0. \quad (52.3)$$

В граничных узлах сетки $x_i, t_j \in \Gamma$ выполнены следующие условия:

$$u(x_i, 0) = f(x_i), \quad u(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad u(l, t_j) = \psi(t_j). \quad (52.4)$$

Предположим, что в точках начального слоя $t = 0$ допущена ошибка $\varepsilon_{i,0}$, т.е.

$$u(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i,0},$$

и пусть $v(x_i, t_j)$ — решение уравнения

$$\sigma v(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)v(x_i, t_j) + \sigma v(x_i - h, t_j) - v(x_i, t_j + k) = 0, \quad (52.5)$$

удовлетворяющее граничным условиям, содержащим ошибку:

$$v(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i,0}, \quad v(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad v(l, t_j) = \psi(t_j). \quad (52.6)$$

Нас интересует, как изменяется погрешность

$$w(x_i, t_j) = v(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)$$

при неограниченном возрастании номера j . Вычитая из уравнения (52.5) уравнение (52.3), для погрешности $w(x_i, t_j)$ получим конечно-разностное уравнение:

$$\sigma w(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)w(x_i, t_j) + \sigma w(x_i - h, t_j) - w(x_i, t_j + k) = 0. \quad (52.7)$$

На границе Γ области имеем

$$\begin{cases} w(x_i, 0) = v(x_i, 0) - u(x_i, 0) = \varepsilon_{i,0}, \\ w(0, t_j) = v(0, t_j) - u(0, t_j) = 0, \\ w(l, t_j) = v(l, t_j) - u(l, t_j) = 0. \end{cases} \quad (52.8)$$

Частное решение уравнения (52.7) будем искать в виде

$$w(x_i, t_j) = \lambda^{t_j} \sin p x_i, \quad (52.9)$$

где числа λ и p ($p > 0$) подберём так, чтобы выражение (52.9) удовлетворяло уравнению (52.7) и однородным краевым условиям

$$w(0, t_j) = 0, \quad w(l, t_j) = 0. \quad (52.10)$$

На основании этих условий имеем

$$\lambda^{t_j} \sin p \cdot 0 = 0, \quad \lambda^{t_j} \sin p l = 0,$$

откуда вытекает, что

$$p l = m \pi, \quad p = \frac{m \pi}{l}, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$w(x_i, t_j) = \lambda^{t_j} \sin \frac{m \pi x_i}{l}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (52.7), будем иметь

$$\sigma \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi}{l}(x_i + h) + (1 - 2\sigma) \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi}{l} x_i + \sigma \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi}{l}(x_i - h) - \lambda^{t_j+k} \sin \frac{m\pi}{l} x_i = 0,$$

или

$$\sigma \left[\sin \frac{m\pi}{l}(x_i + h) - 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i + \sin \frac{m\pi}{l}(x_i - h) \right] + (1 - \lambda^k) \sin \frac{m\pi}{l} x_i = 0. \quad (52.11)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках равенства (52.11), приведём к виду, удобному для логарифмирования. Имеем

$$\begin{aligned} \sin \frac{m\pi}{l}(x_i + h) - 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i + \sin \frac{m\pi}{l}(x_i - h) &= 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \cos \frac{m\pi}{l} h - 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \\ &= 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \left(\cos \frac{m\pi}{l} h - 1 \right) = -4 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \sin^2 \frac{m\pi}{2l} h. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в равенство (52.11) и сокращая обе части на общий множитель $\sin \frac{m\pi}{l} x_i$, получим

$$-4\sigma \sin^2 \frac{m\pi}{2l} h + (1 - \lambda^k) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda^k = 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}$$

и

$$\lambda = \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (52.12)$$

Заметим, что λ не зависит от точки (x_i, t_j) . Таким образом, для однородного уравнения (52.7) получаем линейно независимые решения вида

$$w_m(x_i, t_j) = \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right)^{\frac{t_j}{k}} \sin \frac{m\pi x_i}{l}, \quad (m = 1, 2, \dots, n-1),$$

причем каждое решение удовлетворяет однородным краевым условиям (52.10). Линейная комбинация этих решений

$$w(x_i, t_j) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m w_m(x_i, t_j)$$

или

$$w(x_i, t_j) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right)^{\frac{t_j}{k}} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \quad (52.13)$$

также является решением уравнения (52.7), удовлетворяющим при любых значениях коэффициентов c_m условиям (52.10). Эти коэффициенты подбираются так, чтобы выполнялось первое условие (52.8),

т. е. чтобы

$$w(x_i, 0) = \varepsilon_{i,0}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Для устойчивости рассматриваемой конечно-разностной схемы (52.3) необходимо, чтобы при любых значениях постоянных $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ функция $w(x_i, t_j)$, определяемая равенством (52.13), оставалась ограниченной при $t_j \rightarrow \infty$. Для этого достаточно, чтобы для всех m было выполнено неравенство

$$\left| 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right| \leq 1.$$

Отсюда

$$-1 \leq 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \leq 1$$

и

$$0 \leq \sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \leq \frac{1}{2}, \quad (m = 1, 2, \dots, n-1). \quad (52.14)$$

Неравенство (52.14) заведомо будет выполнено, если величина σ удовлетворяет условию

$$0 < \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (52.15)$$

Полученные неравенства дают достаточные условия устойчивости рассмотренной ранее конечно-разностной схемы (52.3) для решения смешанной задачи в случае уравнения теплопроводности. Заметим, что выбранное в разделе 51 значение $\sigma = 1/6$ удовлетворяет неравенству (52.15).

Замечание. Взяв $\sigma = 1/2$, мы получаем очень удобное конечно-разностное уравнение

$$2u_{i,f+1} = u_{i-1,f} + u_{i+1,f}, \quad (52.16)$$

Схема устойчива, однако в этом случае порядок отклонения уравнения (52.16) от уравнения теплопроводности равен $O(h^2)$, в то время как при $\sigma = 1/6$ этот порядок равен $O(h^4)$.

53 Метод прогонки для уравнения теплопроводности

В предыдущих параграфах мы видели, что для устойчивости конечно-разностной схемы для уравнения теплопроводности шаги $h = \Delta x_i$ и $k = \Delta t_j$ должны быть неодинаковы, причем выбор шага h для пространственной координаты x накладывает определенные ограничения на величину шага k для временной координаты t . Важность этого обстоятельства была отмечена Курантом, Фридрихсом и Леви. Так как при устойчивой схеме шаг k имеет порядок $O(h^2)$, причем отношение $\sigma = \frac{k}{h^2}$ ограничено сверху, то при малом h продвижение решения $u(x, t)$ по t весьма незначительно и объем работы чрезвычайно велик. Например, приняв $h = 0,1$ и полагая $k = \sigma h^2 = 1/600$, получим, что для описания процесса распространения тепла за единичный промежуток времени $0 \leq t \leq 1$ требуется таблица, содержащая

600 строк! Мы сейчас укажем другую устойчивую вычислительную схему, для которой отношение k/h^2 не является ограниченным сверху и поэтому шаг $k = \Delta t_j$ временной координаты может быть выбран сравнительно крупным.

Рассмотрим по-прежнему в области $G := \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t < +\infty\}$ приведенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (53.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t), \quad u(x, 0) = f(x). \quad (53.2)$$

Построим в области G прямоугольную сетку

$$x_i = ih, \quad t_j = jk \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots),$$

где $h = l/n$ (n — целое) и k — некоторая положительная величина. Пусть $u_{ij} = u(x_i, t_j)$. Используя приближенную симметричную формулу для второй производной по x и применяя формулу численного дифференцирования по t («назад», для $(j+1)$ -го слоя сетки), вместо дифференциального уравнения (53.1) будем иметь следующее конечно-разностное уравнение [10]:

$$\frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, 2, \dots),$$

или

$$u_{i-1,j+1} - (2+s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -su_{i,j}, \quad (53.3)$$

где $s = h^2/k$. Таким образом, здесь используется схема II вида (неявная схема) (рисунок 3).

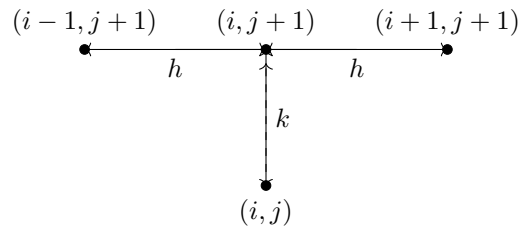


Рисунок 3. Схема II (неявная)

Из граничных условий (53.2) получаем

$$u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \quad u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}). \quad (53.4)$$

Систему (53.3)–(53.4) будем решать методом прогонки. Пусть

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1}(b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \quad (53.5)$$

и, следовательно,

$$u_{i-1,j+1} = a_{i-1,j+1}(b_{i-1,j+1} + u_{i,j+1}). \quad (53.6)$$

Подставляя выражение (53.6) в формулу (53.3), будем иметь

$$a_{i-1,j+1}(b_{i-1,j+1} + u_{i,j+1}) - (2 + s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -su_{ij},$$

отсюда

$$u_{i,j+1} = \frac{a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + su_{ij} + u_{i+1,j+1}}{2 + s - a_{i-1,j+1}}.$$

Сравнивая это выражение с формулой (53.5), получим

$$\begin{aligned} a_{i,j+1} &= \frac{1}{2 + s - a_{i-1,j+1}}, \quad b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + su_{ij}, \\ (i &= 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (53.7)$$

При $i = 1$ из формул (53.3) и (53.5) имеем

$$u_{0,j+1} - (2 + s)u_{1,j+1} + u_{2,j+1} = -su_{1j}$$

и

$$u_{1,j+1} = a_{1,j+1}(b_{1,j+1} + u_{2,j+1}). \quad (53.8)$$

Отсюда, используя граничные условия, получаем

$$u_{1,j+1} = \frac{\varphi(t_{j+1}) + su_{1,j} + u_{2,j+1}}{2 + s}. \quad (53.9)$$

Так как формулы (53.8) и (53.9) должны быть тождественны, то, сравнивая их, выводим:

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2 + s}, \quad b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + su_{1,j}. \quad (53.10)$$

Пользуясь формулами (53.7) и (53.10), производя «прогонку» в прямом направлении (*прямой ход*), определяем две последовательности чисел: $a_{1,j+1}, a_{2,j+1}, \dots, a_{n-1,j+1}$ и $b_{1,j+1}, b_{2,j+1}, \dots, b_{n-1,j+1}$. Отсюда, применяя формулы (53.4) и (53.5), с помощью «обратного хода» находим значения искомой функции:

$$\begin{aligned} u_{n,j+1} &= \psi(t_{j+1}), \\ u_{n-1,j+1} &= (u_{n,j+1} + b_{n-1,j+1})a_{n-1,j+1}, \\ u_{n-2,j+1} &= (u_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1})a_{n-2,j+1}, \\ &\vdots \\ u_{1,j+1} &= (u_{2,j+1} + b_{1,j+1})a_{1,j+1}. \end{aligned} \quad (53.11)$$

Таким образом, указан способ перехода от j -го слоя к $(j + 1)$ -му слою. Следовательно, отправляясь от известного начального (нулевого) слоя, можно шаг за шагом построить искомое решение $u(x, t)$ во всех точках сетки (x_i, t_j) . Выясним устойчивость при $j \rightarrow +\infty$ конечно-разностной схемы (53.3). Пусть $\omega_{ij} = v(x_i, t_j)$ — решение уравнения (53.3), удовлетворяющее «возмущенным» условиям

$$v(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i0}, \quad v(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad v(l, t_j) = \psi(t_j),$$

где ε_{i0} — начальные ошибки. Погрешность

$$w_{ij} = v(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)$$

удовлетворяет уравнению

$$w_{i-1,j+1} - (2 + s)w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1} + sw_{ij} = 0 \quad (53.12)$$

и граничным условиям

$$w_{i0} = \varepsilon_{i0}, \quad w_{0j} = w_{nj} = 0. \quad (53.13)$$

Положим

$$w_i^{(m)} = \lambda_t \sin \frac{m\pi x_i}{l}. \quad (53.14)$$

При целом m ($m = 1, 2, 3, \dots, n-1$) функция $w^{(m)}$ удовлетворяет вторым условиям (53.13). Подставляя выражение (53.14) в уравнение (53.12), получим

$$\lambda^{k+1} \sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} - (2 + s)\lambda^k \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \lambda^k \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} + s\lambda^k \sin \frac{m\pi x_i}{l} = 0$$

или

$$\lambda^k \left[\sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} - 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} \right] - s(\lambda^k - 1) \sin \frac{m\pi x_i}{l} = 0. \quad (53.15)$$

Так как

$$\sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} - 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} = -4 \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin^2 \frac{m\pi h}{2l},$$

то, производя сокращение в формуле (53.15) на $\sin \frac{m\pi x_i}{l}$, будем иметь

$$4\lambda^k \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} + s(\lambda^k - 1) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda^k = -\frac{s}{s + 4 \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}} \leq 1, \quad (53.16)$$

если только $s > 0$, и, следовательно,

$$|\lambda| \leq 1. \quad (53.17)$$

Таким образом, все решения $\omega_{ij}^{(m)}$ асимптотически стремятся к нулю при $j \rightarrow \infty$ или, в крайнем случае, когда $\sin \frac{m\pi h}{2l} = 0$, ограничены и при фиксированном x_i не возрастают по модулю. Так как решение ω_{ij} представляет собой линейную комбинацию функций $\omega_{ij}^{(m)}$, то из неравенства (53.17) следует, что схема (53.3) устойчива при любом $s > 0$. Что касается ошибки аппроксимации для схемы (53.3), то эта ошибка, вообще говоря, есть $O(h^2 + k)$ (раздел 51).

Пример. Рассмотрим разобранную выше (раздел 51) смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Примем $h = 0,1$; $k = 0,01$; следовательно,

$$s = \frac{h^2}{k} = 1.$$

Полагая

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1}(b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}),$$

в силу формул (53.10) и (53.7) будем иметь:

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{3}, \quad b_{1,j+1} = u_{1j}$$

и

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{3 - a_{i-1,j+1}}, \quad b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + u_{ij} \quad (i > 1).$$

В частности, при $j = 0$ получаем формулы для первого слоя:

$$a_{1,1} = \frac{1}{3}, \quad b_{1,1} = u_{10}, \tag{53.18}$$

$$a_{i,1} = \frac{1}{3 - a_{i-1,1}}, \quad b_{i,1} = a_{i-1,1}b_{i-1,1} + u_{i0} \quad (i > 1). \tag{53.19}$$

Кроме того, на основании формул (53.11) имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n1} = 0, \\ u_{n-1,1} = (u_{n1} + b_{n-1,1})a_{n-1,1}, \\ u_{n-2,1} = (u_{n-1,1} + b_{n-2,1})a_{n-2,1}, \\ \vdots \\ u_{11} = (u_{2,1} + b_{1,1})a_{1,1}. \end{array} \right. \tag{53.20}$$

По формулам (53.18), (53.19) и (53.20) можно вычислить значения u_{ij} искомой функции для первого слоя ($j = 1$). Полученные результаты приведены в таблице 53.

Таблица 2: Решение уравнения теплопроводности методом прогонки

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_{i0}	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1,00	0,96	0,84	0,64	0,36	0
a_{i1}	0	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0
b_{i1}	0	0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813	0
u_{i1}	0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310	0
u_{i1}	0	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302	0

В последней строке таблицы 53 для сравнения приведены значения u_i^* , искомой функции, полученные обычным методом сеток при $h = \Delta x = 1/10$ и $k = \Delta t = 1/600$ (раздел 51, таблица 51). Обращает на себя внимание значительное расхождение значений u_{i1} и u_{i1}^* вблизи границы области ($i = 1$ и $i = 9$). Это объясняется тем, что для таких точек примененные формулы численного дифференцирования обладают пониженной точностью. Для устранения этого неблагоприятного обстоятельства рекомендуется для точек, близких к границе области, использовать более точные формулы численного дифференцирования.

54 Контрольные вопросы

1. В чём заключается идея метода сеток для уравнений параболического типа?
2. Как строится конечно-разностная аппроксимация производных в параболических уравнениях?
3. Какие бывают основные типы разностных схем (явные и неявные) и в чём их различие?
4. Что понимается под аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью разностной схемы?
5. Какие условия устойчивости накладываются на явные схемы для параболических уравнений?
6. Как формулируются начальные и граничные условия в методе сеток?
7. Какие методы используются для анализа и оценки погрешности разностных схем?

55 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–24].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1964, гл. I, IV.
- [2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 4, «Наука», 1966, лекции I–IV.
- [3] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, Физматгиз, 1961, гл. I и III.
- [4] Кошляков Н. С., Основные дифференциальные уравнения математической физики, изд. 4, ОНТИ, 1936, гл. I.
- [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, изд. 18, т. II, Физматгиз, 1962, гл. VIII.
- [6] Колгатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [7] Милин В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955, гл. VIII.
- [8] Рябенский В. С. и Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956, гл. I, II.
- [9] Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, «Наука», 1966.
- [10] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.
- [11] Современная математика для инженеров, под ред. Беккенбаха Э. Ф., гл. II, Браун Дж. В., Методы Монте-Карло, ИЛ, 1958.
- [12] Демидович Б. П. и Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, Гостехиздат, 1951, гл. XVII.
- [13] Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956, гл. VIII.

- [14] Мороз Ф. М. и Кимбелл Дж. Е., Методы исследования операций. Приложения, «Советское радио», 1956.
- [15] Математика в СССР за сорок лет, т. I, Физматгиз, 1959, Гаврунин М. К., Канаторович Л. В., Приближенные и численные методы.
- [16] Положий Г. Н. и др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. VII.
- [17] Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1940.
- [18] Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.
- [19] Китов А. И., Криницкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, изд. 2, Физматгиз, 1961, гл. VIII.
- [20] Гурса Э. Ж., Курс математического анализа, т. 3, ГГТИ, 1933, гл. XXVII.
- [21] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. XI.
- [22] Березкин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, изд. 3, «Наука», 1966, т. II, гл. X.
- [23] Слободянский М. Г., Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругого статика, Прикл. матем. и мех. 3, вып. 1 (1939).
- [24] Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.

11-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных сеточными методами. Гиперболические уравнения

Цель лекции — изучение численных методов решения уравнений гиперболического типа. В рамках курса студенты освоят метод сеток (конечно-разностные схемы), научатся строить аппроксимации для начально-краевых задач, анализировать их точность, устойчивость и сходимость, а также применять полученные методы для численного решения задач математической физики и инженерии.

План лекции:

1. Метод сеток для уравнений гиперболического типа
2. Контрольные вопросы
3. Список литературы

56 Метод сеток для уравнения параболического типа

Остановимся на простейшем уравнении гиперболического типа, а именно уравнении свободных колебаний однородной ограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (56.1)$$

и будем искать решение уравнения (56.1) при заданных начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (56.2)$$

и

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t) \quad (0 \leq t < \infty). \quad (56.3)$$

Решим эту смешанную задачу методом сеток [7, 8]. Как и в случае параболического уравнения, покроем полуполосу $0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty$ прямоугольной сеткой $x_i = ih, t_j = jk$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = l/n$ (n — целое) и $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j = k$. На сетке x_i, t_j приближенно заменим дифференциальное уравнение (56.1) соответствующим конечно-разностным уравнением.

Пользуясь симметричными формулами для производных, будем иметь

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (56.4)$$

При $k = h/a$ уравнение (56.4) упрощается и принимает вид

$$u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j},$$

откуда

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (56.5)$$

Из уравнения (56.5) видно, что для получения значений $u(x, t)$ в $(j+1)$ -м слое используются значения $u(x, t)$ в двух предыдущих слоях: j -м и $(j-1)$ -м (рисунок 56). Для начала вычисления по формуле (56.5) также необходимо знать значения $u(x, t)$ на двух слоях, в то время как начальные условия (56.2) задают нам значения $u(x, t)$ лишь на нулевом слое $j = 0$. Однако, используя начальные условия, можно определить значения $u(x, t)$ на фиктивном слое с номером $j = -1$.

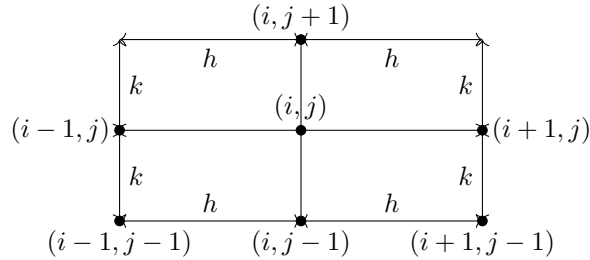


Рисунок 1

Для этого заменим производную во втором начальном условии конечно-разностным отношением. Тогда будем иметь

$$\frac{u_{i,-1} - u_{i0}}{-k} = F_i,$$

где $F_i = F(x_i)$. Отсюда

$$u_{i,-1} = u_{i0} - kF_i. \quad (56.6)$$

Теперь, зная значения $u(x, t)$ на слое $j = -1$, определяемые с помощью формулы (56.6), можно начать вычисления. Краевые условия (56.3) используются для получения значений u_{0j} и u_{nj} .

Вместо определения значений $u(x, t)$ на слое $j = -1$ можно вычислить значения $u(x, t)$ на слое $j = 1$.

Это достигается, например, с помощью формулы Тейлора

$$u_{i1} \approx u_{i0} + k \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}. \quad (56.7)$$

Учитывая, что согласно уравнению (56.1) имеем

$$\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2},$$

перепишем формулу (56.7) в другом виде, а именно:

$$u_{i1} \approx u_{i0} + k \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{a^2 k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2}. \quad (56.8)$$

Из начальных условий (56.2), предполагая, что $f(x) \in C^{(2)}[0, l]$, получаем:

$$u_{i0} = f_i, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = F_i, \quad \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2} = f_i''. \quad (56.9)$$

Подставляя эти значения в формулу (56.8), окончательно находим

$$u_{i1} \approx f_i + k F_i + \frac{a^2 k^2}{2} f_i''. \quad (56.10)$$

Очевидно, формулу (56.10) целесообразно применять в том случае, когда функция $f(x)$ задана аналитическим выражением.

Пример. Методом сеток найти приближенное решение уравнения [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty);$$

$$u(x, 0) = x(\pi - x), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Решение. В нашем случае $a = 1$, поэтому $k = h$. Выбираем $k = h = \pi/18$. С помощью формулы (10) определим значения u_{i1} . Так как

$$F_i = 0, \quad f_i'' = -2,$$

то

$$u_{i1} = u_{i0} - h^2 = u_{i0} - 0,03048.$$

Дальше решение проводится по формуле (56.5). Полученные значения приведены в таблице 56.

В таблице приведены лишь данные для $0 \leq x \leq \pi/2$, так как график решения $u = u(x, t)$ симметричен относительно плоскости $x = \pi/2$.

Замечание 1. Отметим одну особенность уравнения колебаний струны. При решении задачи Коши для уравнения колебаний струны дифференциальный оператор

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Таблица 8: Значения $u(x, t)$ для волнового уравнения

t	$x = 0$	$x = h$	$x = 2h$	$x = 3h$	$x = 4h$	$x = 5h$	$x = 6h$	$x = 7h$	$x = 8h$	$x = 9h$
$t = 0$	0	0,518	0,975	1,371	1,706	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
$t = h$	0	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
$t = 2h$	0	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
$t = 3h$	0	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
$t = 4h$	0	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
$t = 5h$	0	0,244	0,487	0,731	0,975	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706

заменяется на сетке при условии, что $h = ak$, конечно-разностным оператором

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \quad (56.11)$$

(в исходном тексте, видимо, опечатка; привожу стандартную аппроксимацию). Покажем, что в этом случае функция, являющаяся решением уравнения колебания струны, т. е. удовлетворяющая уравнению

$$L[u] = 0, \quad (56.12)$$

является также решением уравнения

$$L_h[u] = 0.$$

В самом деле, как известно [1–5], любое решение дифференциального уравнения (56.12) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

где φ и ψ — дважды дифференцируемые функции. Полагая

$$x_i = ih, \quad t_j = jk = \frac{ih}{a},$$

будем иметь

$$u_{ij} = u(x_i, t_j) = \varphi[(i - j)h] + \psi[(i + j)h].$$

Подставляя это выражение в формулу (56.11), получим

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2} \{ \varphi[(i - j - 1)h] + \psi[(i + j + 1)h] - \varphi[(i - j + 1)h] - \psi[(i + j + 1)h] - \varphi[(i - j - 1)h] - \psi[(i + j - 1)h] + \varphi[(i - j + 1)h] + \psi[(i + j - 1)h] \} \equiv 0.$$

Замечание 2. Если для уравнения колебаний струны (56.1) краевые условия (56.3) отсутствуют, то с помощью формулы (56.5) можно построить решение $u(x, t)$ соответствующей задачи Коши лишь в сеточной области плоскости Oxt , имеющей форму треугольника OAB (рисунок 2), где OB и AB — характеристики

$$t = \frac{x}{a}, \quad t = \frac{l-x}{a},$$

проходящие соответственно через точки $O(0, 0)$ и $A(l, 0)$.

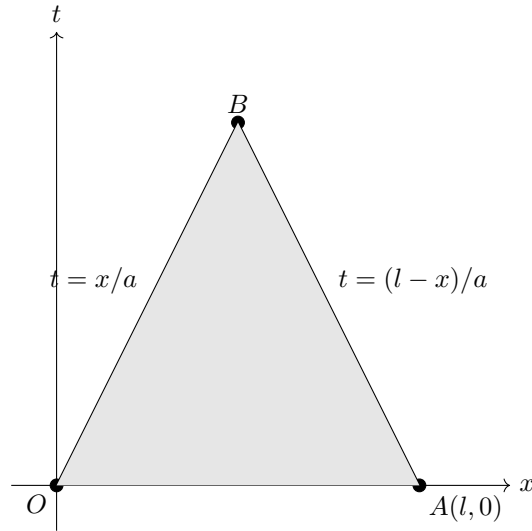


Рисунок 2. Область зависимости для задачи Коши

57 Контрольные вопросы

1. Что понимается под уравнениями гиперболического типа? Приведите примеры.
2. Сформулируйте классическую задачу Коши для одномерного волнового уравнения.
3. Что такое разностная схема? Какие основные элементы она включает?
4. Как вводится сетка по пространству и времени? Определите шаги h и τ .
5. Запишите явную разностную схему для одномерного волнового уравнения.
6. Запишите неявную разностную схему для гиперболического уравнения.
7. Что такое аппроксимация разностной схемы? Как определяется порядок аппроксимации?

8. В чем заключается метод прогонки для решения разностных уравнений?
9. Какие особенности возникают при решении нелинейных гиперболических уравнений?
10. Какие существуют методы повышения устойчивости разностных схем?

58 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–24].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1964, гл. I, IV.
- [2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 4, «Наука», 1966, лекции I–IV.
- [3] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, Физматгиз, 1961, гл. I и III.
- [4] Кошляков Н. С., Основные дифференциальные уравнения математической физики, изд. 4, ОНТИ, 1936, гл. I.
- [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, изд. 18, т. II, Физматгиз, 1962, гл. VIII.
- [6] Колгатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [7] Милин В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955, гл. VIII.
- [8] Рябенский В. С. и Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956, гл. I, II.
- [9] Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, «Наука», 1966.
- [10] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.
- [11] Современная математика для инженеров, под ред. Беккенбаха Э. Ф., гл. II, Браун Дж. В., Методы Монте-Карло, ИЛ, 1958.

- [12] Демидович Б. П. и Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, Гостехиздат, 1951, гл. XVII.
- [13] Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956, гл. VIII.
- [14] Мороз Ф. М. и Кимбелл Дж. Е., Методы исследования операций. Приложения, «Советское радио», 1956.
- [15] Математика в СССР за сорок лет, т. I, Физматгиз, 1959, Гаврунин М. К., Канаторович Л. В., Приближенные и численные методы.
- [16] Положий Г. Н. и др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. VII.
- [17] Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1940.
- [18] Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.
- [19] Китов А. И., Криницкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, изд. 2, Физматгиз, 1961, гл. VIII.
- [20] Гурса Э. Ж., Курс математического анализа, т. 3, ГТТИ, 1933, гл. XXVII.
- [21] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. XI.
- [22] Березкин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, изд. 3, «Наука», 1966, т. II, гл. X.
- [23] Слободянский М. Г., Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругого статика, Прикл. матем. и мех. 3, вып. 1 (1939).
- [24] Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.

12-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом прямых. Эллиптические уравнения

Цель лекции — изучение метода прямых для численного решения уравнения Пуассона, освоение принципов пространственной дискретизации, построения разностных схем и анализа сходимости и устойчивости получаемых численных решений.

План лекции:

1. Метод прямых для уравнения Пуассона
2. Контрольные вопросы
3. Список литературы

59 Метод прямых для уравнения Пуассона

При замене линейного дифференциального уравнения второго порядка системой уравнений метода прямых, вообще говоря, получается ошибка порядка h^2 , где h — расстояние между прямыми. Эту ошибку можно уменьшить, если воспользоваться более точными формулами численного дифференцирования. Покажем это на примере уравнения Пуассона.

Пусть в прямоугольной области $R\{a \leq x \leq b; \alpha \leq y \leq \beta\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (59.1)$$

и требуется найти решение $u := u(x, y)$ этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{aligned} u(x, \alpha) &= \varphi_0(x), & u(x, \beta) &= \varphi_1(x); \\ u(a, y) &= \psi_0(y), & u(b, y) &= \psi_1(y), \end{aligned} \quad (59.2)$$

где функции f и ψ_k ($k = 0, 1$) непрерывны и $\varphi_k \in C^{(2)}[a, b]$ ($k = 0, 1$). Будем решать краевую задачу (59.1)–(59.2) методом прямых. Для этого выберем шаг $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$ и через точки деления $y_j = y_0 + hj$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$; $y_0 = \alpha$, $y_n = \beta$) проведем параллели $y = y_j$. Пусть $u_j(x) = u(x, y_j)$. Предполагая, что функция $u(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по y до шестого порядка включительно, разложим функции $u_{j+1}(x) = u(x, y_j + h)$ и $u_{j-1}(x) = u(x, y_j - h)$ по формуле Тейлора с точностью до

$O(h^6)$. Имеем

$$u_{j+1}(x) = u_j(x) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_j)h + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j)\frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y_j)\frac{h^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)\frac{h^4}{24} + \frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x, y_j)\frac{h^5}{120} + O(h^6) \quad (59.3)$$

и

$$u_{j-1}(x) = u_j(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_j)h + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j)\frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y_j)\frac{h^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)\frac{h^4}{24} - \frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x, y_j)\frac{h^5}{120} + O(h^6). \quad (59.4)$$

Сложив равенства (59.3) и (59.4), получим

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j)h^2 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)\frac{h^4}{12} + O(h^6). \quad (59.5)$$

Заменяя в формуле (1.5) функцию

$$u_k(x) = u(x, y_k) \quad (k = j+1, j, j-1)$$

соответствующими вторыми производными и ограничиваясь членами порядка h^2 , будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j+1}) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j-1}) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)h^2 + O(h^4). \quad (59.6)$$

Исключая из формул (59.5) и (59.6) производную $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y_j)$ и отбрасывая члены порядка h^6 , получим приближенную формулу

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j+1}) + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j-1}) \right],$$

которая после приведения подобных членов принимает вид

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j+1}) + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y_{j-1}) \right]. \quad (59.7)$$

Формула (59.7), имеющая точность $O(h^6)$, может быть использована для решения краевой задачи (59.1)–(59.2). Действительно, из уравнения (59.1) при $y = y_k$ имеем

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f_k(x) - u_k''(x), \quad (59.8)$$

где $f_k(x) = f(x, y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Отсюда, заменяя в формуле (59.7) вторые частные производные по y их значениями из формулы (59.8), для определения решений $u_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u_{j+1}''(x) + 10u_j''(x) + u_{j-1}''(x) + \frac{12}{h^2} [u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)] = f_{j+1}(x) + 10f_j(x) + f_{j-1}(x) \quad (59.9)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Эта усовершенствованная система (59.9) метода прямых была предложена М. Г. Слободянским [23] и аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до $\frac{12}{h^2}O(h^6) = O(h^4)$. На основании краевых условий (59.2) дополнительно получаем:

$$u_0(x) = \varphi_0(x), \quad u_n(x) = \varphi_1(x); \quad u_j(a) = \psi_0(y_j), \quad u_j(b) = \psi_1(y_j). \quad (59.10)$$

Отсюда

$$u_0''(x) = \varphi_0''(x), \quad u_n''(x) = \varphi_1''(x).$$

Общее решение системы (59.9), как известно, складывается из частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы

$$v_{j+1}''(x) + 10v_j''(x) + v_{j-1}''(x) + \frac{12}{h^2}[v_{j+1}(x) - 2v_j(x) + v_{j-1}(x)] = 0. \quad (59.11)$$

Очевидно, что общее решение системы (59.11) не зависит от области R и краевых условий (59.2) и для данного уравнения (59.1) может быть получено раз и навсегда. Приведем без доказательства (см. [22]) формулы общего решения системы (59.11):

$$v_j(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k(y_j - y_0)}{l} (A_k e^{\sigma_k x} + B_k e^{-\sigma_k x}) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

где $l = \beta - \alpha$, A_k и B_k — произвольные постоянные, а

$$\sigma_k^2 = \frac{24}{h^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi k h}{2l}}{1 + 5 \sin^2 \frac{\pi k h}{2l}}.$$

Частное решение неоднородной системы (59.9) находится обычным путем, в крайнем случае можно применить метод вариации произвольных постоянных. Для отыскания постоянных A_k и B_k на основании условий (59.10) получается алгебраическая система $2n - 2$ уравнений.

Пример В области $R\{0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y. \quad (59.12)$$

Методом прямых найти решение этого уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$u(0, y) = u(3, y) = u(x, 0) = u(x, 3) = 0. \quad (59.13)$$

Решение. Примем $h = 1$ и проведем прямые $y = 1$ и $y = 2$. Используя метод прямых, будем искать приближенное решение $u_j(x) = u(x, y_j)$ ($j = 1, 2$) задачи (59.12)–(59.13) на прямых $y = y_1$ и $y = y_2$, где $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$. Выписывая систему (1.9), получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} u_2''(x) + 10u_1''(x) + u_0''(x) + 12[u_2(x) - 2u_1(x) + u_0(x)] &= (x + 2) + 10(x + 1) + (x + 0), \\ u_3''(x) + 10u_2''(x) + u_1''(x) + 12[u_3(x) - 2u_2(x) + u_1(x)] &= (x + 3) + 10(x + 2) + (x + 1). \end{aligned} \quad (59.14)$$

В силу краевых условий (59.13) имеем $u_0(x) = u_3(x) = 0$, и, следовательно,

$$u_0''(x) = u_3''(x) = 0.$$

Система (59.14) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} 10u_1''(x) + u_2''(x) - 24u_1(x) + 12u_2(x) &= 12x + 12, \\ u_1''(x) + 10u_2''(x) + 12u_1(x) - 24u_2(x) &= 12x + 24, \end{aligned} \quad (59.15)$$

причем

$$u_1(0) = u_1(3) = 0, \quad u_2(0) = u_2(3) = 0. \quad (59.16)$$

Соответствующая однородная система имеет вид

$$\begin{aligned} 10v_1''(x) + v_2''(x) - 24v_1(x) + 12v_2(x) &= 0, \\ v_1''(x) + 10v_2''(x) + 12v_1(x) - 24v_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (59.17)$$

Полагая

$$v_1(x) = Ae^{\lambda x}, \quad v_2(x) = Be^{\lambda x} \quad (59.18)$$

и подставляя эти выражения в систему (59.17), после сокращения на $e^{\lambda x}$ получаем

$$\begin{aligned} A(10\lambda^2 - 24) + B(\lambda^2 + 12) &= 0, \\ A(\lambda^2 + 12) + B(10\lambda^2 - 24) &= 0. \end{aligned} \quad (59.19)$$

Так как мы предполагаем, что решение (59.18) ненулевое, то определитель линейной системы (59.19) должен быть равен нулю. Отсюда получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 10\lambda^2 - 24 & \lambda^2 + 12 \\ \lambda^2 + 12 & 10\lambda^2 - 24 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(10\lambda^2 - 24)^2 - (\lambda^2 + 12)^2 = 0.$$

т. е.

$$(9\lambda^2 - 36)(11\lambda^2 - 12) = 0. \quad (59.20)$$

Следовательно, характеристические корни будут

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{12}{11}}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{12}{11}}.$$

Соответствующие постоянные A и B определяются из системы (59.19). Имеем

$$\frac{A}{\lambda^2 + 12} = -\frac{B}{10\lambda^2 - 24} = C;$$

отсюда

$$\begin{aligned}\frac{A_k}{16} &= -\frac{B_k}{16} \quad (k = 1, 2); \\ \frac{A_k}{144/11} &= \frac{B_k}{144/11} \quad (k = 3, 4).\end{aligned}$$

Можно принять $A_k = -B_k = C_k$ ($k = 1, 2$), $A_k = B_k = C_k$ ($k = 3, 4$). Таким образом,

$$\begin{aligned}v_1(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}}, \\ v_2(x) &= -C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}}.\end{aligned}\tag{59.21}$$

Частное решение системы (59.15) ищем в виде

$$\tilde{u}_1(x) = Ax + B, \quad \tilde{u}_2(x) = Cx + D.$$

Подставляя эти выражения в систему (59.15), для определения постоянных A, B, C, D получаем систему

$$\begin{aligned}-2A + C &= 1, \quad -2B + D = 1, \\ A - 2C &= 1, \quad B - 2D = 2.\end{aligned}$$

Отсюда находим: $A = C = -1$, $B = -4/3$, $D = -5/3$, и, значит,

$$\tilde{u}_1(x) = -\left(x + \frac{4}{3}\right), \quad \tilde{u}_2(x) = -\left(x + \frac{5}{3}\right).\tag{59.22}$$

На основании формул (59.21) и (59.22) общее решение системы (59.15) имеет вид

$$\begin{aligned}u_1(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}} - \left(x + \frac{4}{3}\right), \\ u_2(x) &= -C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-x\sqrt{12/11}} - \left(x + \frac{5}{3}\right).\end{aligned}\tag{59.23}$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 используем граничные условия (59.16). В силу этих условий и формул (59.23) получаем систему

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= \frac{4}{3}, \\ -C_1 - C_2 + C_3 + C_4 &= \frac{5}{3}, \\ C_1 e^6 + C_2 e^{-6} + C_3 e^{3\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-3\sqrt{12/11}} &= \frac{13}{3}, \\ -C_1 e^6 - C_2 e^{-6} + C_3 e^{3\sqrt{12/11}} + C_4 e^{-3\sqrt{12/11}} &= \frac{14}{3}.\end{aligned}\tag{59.24}$$

Отсюда

$$C_1 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{e^6 + 1} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{e^{-3}}{\operatorname{ch} 3}, \quad C_2 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{e^6}{e^6 + 1} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{e^3}{\operatorname{ch} 3},$$
$$C_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3 - e^{-3\sqrt{12/11}}}{\operatorname{sh}(3\sqrt{12/11})}, \quad C_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{3\sqrt{12/11}} - 3}{\operatorname{sh}(3\sqrt{12/11})}.$$

Подставляя эти значения в формулы (59.23), после несложных упрощений окончательно находим

$$u(x, 1) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2x - 3)}{\operatorname{ch} 3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \operatorname{sh}(x\sqrt{12/11}) - \operatorname{sh}[(x - 3)\sqrt{12/11}]}{\operatorname{sh}(3\sqrt{12/11})} - \left(x + \frac{4}{3}\right),$$
$$u(x, 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2x - 3)}{\operatorname{ch} 3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \operatorname{sh}(x\sqrt{12/11}) - \operatorname{sh}[(x - 3)\sqrt{12/11}]}{\operatorname{sh}(3\sqrt{12/11})} - \left(x + \frac{5}{3}\right).$$

60 Контрольные вопросы

1. Что представляет собой уравнение Пуассона и в каких задачах оно возникает?
2. В чем заключается идея метода прямых при решении краевых задач для уравнения Пуассона?
3. Как выполняется дискретизация области по пространственным переменным в методе прямых?
4. Каким образом дифференциальный оператор Лапласа заменяется разностным оператором?
5. Как строится система алгебраических уравнений после применения метода прямых?
6. Какие граничные условия (Дирихле, Неймана, смешанные) используются и как они учитываются в методе прямых?
7. Каковы основные требования сходимости и устойчивости метода прямых для уравнения Пуассона?
8. Какие численные методы применяются для решения полученной системы линейных уравнений?
9. Как влияет шаг сетки на точность численного решения?
10. В чем преимущества и недостатки метода прямых по сравнению с другими численными методами?

61 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–24].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1964, гл. I, IV.
- [2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 4, «Наука», 1966, лекции I—IV.
- [3] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, Физматгиз, 1961, гл. I и III.
- [4] Кошляков Н. С., Основные дифференциальные уравнения математической физики, изд. 4, ОНТИ, 1936, гл. I.
- [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, изд. 18, т. II, Физматгиз, 1962, гл. VIII.
- [6] Колгатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [7] Милин В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955, гл. VIII.
- [8] Рябенский В. С. и Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956, гл. I, II.
- [9] Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, «Наука», 1966.
- [10] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.
- [11] Современная математика для инженеров, под ред. Беккенбаха Э. Ф., гл. II, Браун Дж. В., Методы Монте-Карло, ИЛ, 1958.
- [12] Демидович Б. П. и Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, Гостехиздат, 1951, гл. XVII.
- [13] Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956, гл. VIII.
- [14] Мороз Ф. М. и Кимбелл Дж. Е., Методы исследования операций. Приложения, «Советское радио», 1956.
- [15] Математика в СССР за сорок лет, т. I, Физматгиз, 1959, Гаврунин М. К., Канаторович Л. В., Приближенные и численные методы.
- [16] Положий Г. Н. и др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. VII.

- [17] Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1940.
- [18] Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.
- [19] Китов А. И., Криницкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, изд. 2, Физматгиз, 1961, гл. VIII.
- [20] Гурса Э. Ж., Курс математического анализа, т. 3, ГТТИ, 1933, гл. XXVII.
- [21] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. XI.
- [22] Березкин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, изд. 3, «Наука», 1966, т. II, гл. X.
- [23] Слободянский М. Г., Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругого статика, Прикл. матем. и мех. 3, вып. 1 (1939).
- [24] Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.

13-лекция. Вариационные методы решения краевых задач

Цель лекции — сформировать у студентов системное понимание вариационного подхода к решению краевых задач математической физики и научить применять эти методы для доказательства существования, единственности и приближённого нахождения решений.

План лекции:

1. Вариационная задача
2. Метод Ритца для простейшей краевой задачи
3. Приложение метода Ритца к решению краевой задачи Штурма — Лиувилля
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

62 Вариационная задача

Пусть дан функционал

$$I = I[y(x)], \quad (62.1)$$

определенный на некотором множестве $K = \{y(x)\}$. Задача об отыскании экстремумов функционала (62.1) называется **вариационной задачей**. Более точно вариационная задача ставится следующим образом: требуется найти функцию $y = \bar{y}(x) \in K$ такую, что для всех допустимых функций $y = y(x)$, достаточно близких к функции $\bar{y}(x)$, имеет место неравенство

$$I[y] \geq I[\bar{y}],$$

в случае минимума, или неравенство

$$I[y] \leq I[\bar{y}],$$

в случае максимума. При этом расстояние между функциями y и $\bar{y}$ можно понимать по-разному.

Пример. Рассмотрим задачу: среди гладких кривых $y = y(x)$, проходящих через точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$, найти линию с наименьшей длиной дуги (рисунок 4).

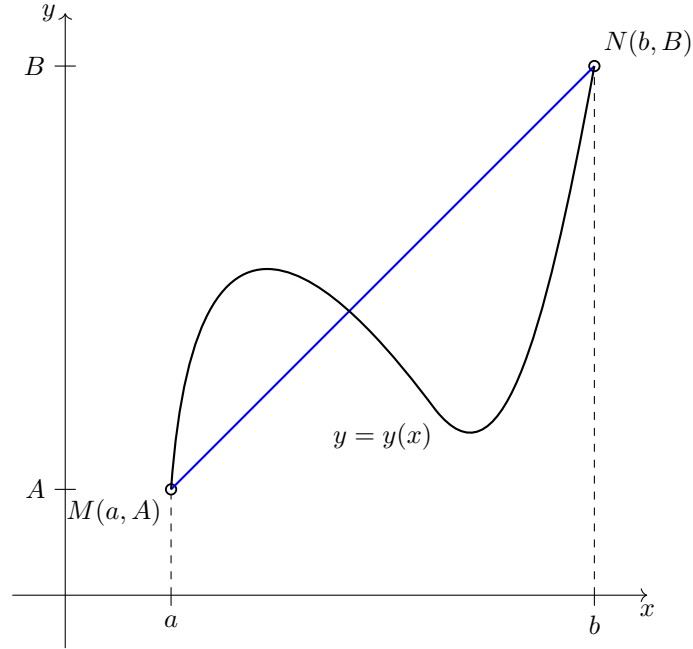


Рис. 4: Кривая наименьшей длины — прямая, соединяющая точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$.

Задача сводится к нахождению минимума функционала

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

для кривых $y = y(x)$, принадлежащих классу $C^{(1)}[a, b]$ и таких, что $y(a) = A$ и $y(b) = B$. Из геометрических соображений очевидно, что искомым решением будет прямая

$$\bar{y} = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a),$$

причем

$$s_{\min} = \sqrt{(b - a)^2 + (B - A)^2}.$$

63 Метод Ритца для простейшей краевой задачи

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y = f(x) \quad (63.1)$$

с простейшими краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (63.2)$$

где $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$, причем $p(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$. Краевая задача (63.1)–(63.2) при известных условиях эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx \quad (63.3)$$

на множестве функций $y \in C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям (63.2).

Для решения вариационной задачи (63.3)–(63.2) применим метод Ритца. Выберем систему линейно независимых функций (координатные функции) $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ таких, что $u_0(a) = A, u_0(b) = B$, а остальные функции $u_i(x)$ ($i > 0$) удовлетворяют однородным краевым условиям, т. е. $u_i(a) = u_i(b) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Решение вариационной задачи будем искать в виде линейной комбинации

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (63.4)$$

где c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — некоторые постоянные. Очевидно, функция, определенная равенством (63.4), удовлетворяет заданным краевым условиям, т. е. $y(a) = A, y(b) = B$. Коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ подберем так, чтобы функция $y(x)$ давала экстремум функционалу (63.3). Подставляя выражение (63.4) в формулу (63.3), получаем

$$\begin{aligned} F[y] &= \int_a^b \left\{ p(x) \left[u'_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u'_i(x) \right]^2 - q(x) \left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right]^2 + 2f(x) \left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right] \right\} dx \\ &\equiv \psi(c_1, c_2, \dots, c_n), \end{aligned}$$

где $\Psi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ — квадратичная функция переменных $c_1, c_2, \dots, c_n$. Как известно, для того чтобы дифференцируемая функция $\Psi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ при некоторых значениях $c_1, c_2, \dots, c_n$ имела экстремум, необходимо соблюдение для этих значений следующих условий:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial c_n} = 0. \quad (63.5)$$

Система (63.5) является линейной относительно искомых коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n$, причем число уравнений равно числу неизвестных. Составив систему (63.5) и решив ее, если это возможно, найдем коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \dots, n$), после чего решение вариационной задачи, а следовательно, и решение исходной краевой задачи дается формулой (63.4). В этом и состоит формальный аспект метода Ритца для краевой задачи (63.1)–(63.2). Оценка погрешности этого метода представляет собой относительно трудную задачу [3], и разбирать ее здесь не будем. Заметим только, что точность решения в большой степени зависит от удачного подбора координатных функций, и, вообще говоря, возрастает с увеличением их числа.

Пример. Найти решение уравнения [1]

$$y'' + (1 + x^2)y' + 1 = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям $y(-1) = y(1) = 0$.

Решение. За систему координатных функций $\{u_i(x)\}$ принимаем полиномы, расположенные по степеням x^2 , удовлетворяющие однородным краевым условиям:

$$u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = 1 - x^2, \quad u_2(x) = 1 - x^4, \dots, \quad u_n(x) = 1 - x^{2n}.$$

Для простоты выкладок возьмем лишь три координатные функции, т. е. будем искать функцию $y = y(x)$ в виде суммы

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4). \quad (63.6)$$

Данное уравнение, где $p(x) = 1$, $q(x) = 1 + x^2$, $f(x) = -1$, очевидно, является самосопряженным.

Составляем для него соответствующий функционал

$$F[y] = \int_{-1}^1 [y'^2 - (1 + x^2)y^2 - 2y] dx.$$

Заменяя y его выражением (63.6), получаем

$$F[y] = \int_{-1}^1 \{(2c_1x + 4c_2x^3)^2 - (1 + x^2)[c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)]\} dx.$$

Частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2}$$

можно найти дифференцированием интеграла $F[y]$ по параметрам c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c_1} &= \int_{-1}^1 \{4x(2c_1x + 4c_2x^3) - (1 + x^2) \cdot 2(1 - x^2)[c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)] - 2(1 - x^2)\} dx = \\ &= 8 \left(\frac{38}{105}c_1 + \frac{4}{9}c_2 - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c_2} &= \int_{-1}^1 \{8x^3(2c_1x + 4c_2x^3) - 2(1 + x^2)(1 - x^4)[c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)] - 2(1 - x^4)\} dx = \\ &= 8 \left(\frac{4}{9}c_1 + \frac{2488}{3645}c_2 - \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая эти производные нулю, получаем систему уравнений

$$\frac{38}{105}c_1 + \frac{4}{9}c_2 = \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{9}c_1 + \frac{2488}{3645}c_2 = \frac{2}{5},$$

откуда находим, что $c_1 = 0.988$, $c_2 = -0.054$. Подставляя найденные значения c_1 и c_2 в формулу (63.6), получаем приближенное выражение для искомого решения:

$$y = 0.934 - 0.988x^2 + 0.054x^4.$$

64 Приложение метода Ритца к решению краевой задачи Штурма—Лиувилля

Рассмотрим однородное самосопряженное дифференциальное уравнение

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda\rho(x)]y = 0 \quad (64.1)$$

с однородными краевыми условиями

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \quad (64.2)$$

где $p(x) > 0$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, $p(x), q(x), \rho(x)$ — непрерывные функции и λ — параметр. Очевидно, функция $y \equiv 0$ есть решение дифференциального уравнения (64.1), удовлетворяющее краевым условиям (64.2). Однако обычно представляют интерес нетривиальные решения краевой задачи (64.1)—(64.2). Отыскание нетривиальных решений дифференциального уравнения (64.1), удовлетворяющих однородным краевым условиям (64.2), называется задачей Штурма — Лиувилля. С этой задачей часто приходится иметь дело в уравнениях математической физики. Те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (64.1)—(64.2), называются **собственными значениями** или **собственными числами** задачи Штурма — Лиувилля, а соответствующие им нетривиальные решения — **собственными функциями** или **собственными решениями** задачи этой задачи. Ограничимся рассмотрением уравнения (64.1) при простейших однородных краевых условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (64.3)$$

Покажем, как, используя метод Ритца, можно приближенно решить соответствующую задачу Штурма — Лиувилля. Для этого, как указано в разделе 63, для уравнения (64.1) построим соответствующий функционал

$$F[y] = \int_a^b \{p(x)(y'')^2 - [q(x) + \lambda\rho(x)](y')^2\} dx. \quad (64.4)$$

Будем искать функцию $y = y(x, \lambda)$, дающую экстремум этому функционалу и такую, что $y(a, \lambda) = 0$, $y(b, \lambda) = 0$. Те значения параметра λ , при которых наша вариационная задача имеет нетривиальные решения, при известных условиях являются искомыми собственными значениями рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля. Искомую функцию y приближенно представим в виде линейной комбинации координатных функций

$$y = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (64.5)$$

где $u_i(a) = u_i(b) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ввиду однородности задачи полагаем $u_0(x) \equiv 0$. Подставив выражение (64.5) в интеграл (64.4) и произведя соответствующие выкладки, будем иметь

$$F[y] = \psi(c_1, c_2, \dots, c_n, \lambda),$$

где ψ — квадратичная форма (линейная однородная функция второй степени) от переменных $c_1, c_2, \dots, c_n$. Коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ находим, используя необходимые условия для экстремума функции ψ . Это дает нам линейную однородную систему

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_n} = 0. \quad (64.6)$$

Как известно, для того чтобы однородная система (64.6) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее $\Delta(\lambda)$, очевидно, зависящий от параметра λ , был равен нулю. Таким образом, для определения собственных значений получаем алгебраическое уравнение n -й степени

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (64.7)$$

которое называется характеристическим уравнением или уравнением частот задачи Штурма — Лиувилля. Решив характеристическое уравнение (64.7), находим первые n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Для определения коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n$ следует каждое из полученных собственных значений λ_i подставить в систему (64.6) и найти соответствующие нетривиальные решения этой системы. Собственные функции $y = y(x, \lambda_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) определяются из формулы (64.5), где коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) имеют найденные выше значения. Заметим, что методом Ритца можно отыскать, разумеется приближенно, лишь конечное число собственных значений задачи Штурма — Лиувилля (как правило, такие задачи имеют бесконечное множество собственных значений), причем чем больше используется координатных функций, тем больше, вообще говоря, находим собственных значений и выше точность вычислений.

Пример. Методом Ритца определить первые два собственных значения и первые две собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для уравнения

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (64.8)$$

при краевых условиях

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (64.9)$$

Решение. Функционал (64.4) для данного уравнения (64.8) имеет вид

$$F[y] = \int_0^1 (y'^2 - \lambda y^2) dx. \quad (64.10)$$

Учитывая краевые условия (64.9), выбираем, например, следующие координатные функции:

$$u_1(x) = x(1-x), \quad u_2(x) = x^2(1-x)$$

и соответственно полагаем

$$y = c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3), \quad (64.11)$$

где c_1 и c_2 — постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно ($c_1^2 + c_2^2 > 0$). Подставляя выражение (64.11) в формулу (64.10), будем иметь

$$F[y] = \int_0^1 \{ [c_1(1-2x) + c_2(2x-3x^2)]^2 - \lambda [c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3)]^2 \} dx.$$

Отсюда, дифференцируя по параметрам c_1 и c_2 под знаком интеграла, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial c_1} &= \int_0^1 \{ (1-2x)[c_1(1-2x) + c_2(2x-3x^2)] - \lambda(x-x^2)[c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3)] \} dx = \\ &= \left[\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 \right] - \lambda \left[\frac{1}{30}c_1 + \frac{1}{60}c_2 \right], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial c_2} &= \int_0^1 \{ (2x-3x^2)[c_1(1-2x) + c_2(2x-3x^2)] - \lambda(x^2-x^3)[c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3)] \} dx = \\ &= \left[\frac{1}{6}c_1 + \frac{2}{15}c_2 \right] - \lambda \left[\frac{1}{60}c_1 + \frac{1}{105}c_2 \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю производные

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial c_2}$$

приходим к системе

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 \right) \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) = 0, \\ \frac{1}{6}c_1 \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) + \frac{2}{15}c_2 \left(1 - \frac{\lambda}{14} \right) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (2c_1 + c_2) \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) = 0, \\ 5c_1 \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) + 4c_2 \left(1 - \frac{\lambda}{14} \right) = 0. \end{cases} \quad (64.12)$$

Система (64.12) имеет ненулевое решение c_1, c_2 тогда и только тогда, когда определитель ее равен нулю. Приравнявая нулю определитель системы (64.12), получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) & 1 - \frac{\lambda}{10} \\ 5 \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) & 4 \left(1 - \frac{\lambda}{14} \right) \end{vmatrix} = 0$$

или, после упрощений,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) \left(3 - \frac{\lambda}{14} \right) = 0. \quad (64.13)$$

Отсюда находим приближенные собственные значения задачи

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 42. \quad (64.14)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 определяем из системы (64.12). При $\lambda = \lambda_1 = 10$ имеем $c_1 = c$, $c_2 = 0$. Следовательно, первая собственная функция нашей краевой задачи в силу формулы (64.11) есть

$$y_1 \approx c(x - x^2) \quad (c \neq 0).$$

Полагая $\lambda = \lambda_2 = 42$ в системе (64.12), будем иметь

$$2c_1 + c_2 = 0, \quad 16c_1 - 8c_2 = 0;$$

отсюда $c_1 = c$, $c_2 = -2c$. Подставляя последние выражения в формулу (64.11), получаем вторую собственную функцию

$$y_2 \approx c(x - 3x^2 + 2x^3) \quad (c \neq 0).$$

В данном случае известно точное решение краевой задачи (64.8)–(64.9). А именно, собственные значения имеют вид $\lambda_n = n^2\pi^2$ ($n = 1, 2, \dots$), а соответствующие собственные функции определяются формулой

$$y_n = c \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $c \neq 0$. В частности, получаем $\lambda_1 = \pi^2 = 9,87$ и $\lambda_2 = 4\pi^2 = 39,48$. Таким образом, из приближенных собственных значений (64.14) первое определено примерно с относительной погрешностью 1,3%, а второе — с относительной погрешностью 6,4%.

65 Контрольные вопросы

1. В чём состоит идея метода Ритца при решении простейшей краевой задачи? Как он связан с принципом минимума функционала энергии?
2. Как осуществляется переход от дифференциальной постановки краевой задачи к вариационной (слабой) формулировке?
3. Какие требования предъявляются к базисным функциям в методе Ритца? Почему важно учитывать граничные условия?
4. Как строится аппроксимирующее решение в методе Ритца и как выводится система алгебраических уравнений для коэффициентов?

5. В чём особенности применения метода Рунге к краевой задаче Штурма–Лиувилля? Как возникает задача на собственные значения?
6. Как формулируется вариационный принцип для задачи Штурма–Лиувилля (минимизация функционала Релея)? Как интерпретируются собственные значения?
7. Как с помощью метода Рунге можно приближённо найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля? В чём заключается сходимость метода?

66 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [2] Березкин И. А. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1959, гл. X.
- [3] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. III.

14-лекция. Метод Ритца для задачи Дирихле

Цель лекции – сформировать у студентов понимание вариационного подхода к решению краевых задач (в частности, задачи Дирихле) и освоить метод Ритца как способ приближённого нахождения решений через минимизацию функционалов энергии.

План лекции:

1. Метод Ритца для задачи Дирихле
2. Контрольные вопросы
3. Список литературы

67 Метод Ритца для задачи Дирихле

Будем искать решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } (x, y) \in G \quad (67.1)$$

и

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \quad (67.2)$$

где Γ — простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область G , а функция $f(x, y)$ непрерывна на Γ . Согласно лекции 13 эта краевая задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (67.3)$$

в классе функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $G + \Gamma$ и удовлетворяющих на границе Γ краевому условию (67.2). Построим конечную систему линейно независимых функций (координатные функции)

$$u_0(x, y), u_1(x, y), \dots, u_n(x, y) \in C^{(2)}(G + \Gamma)$$

таких, что

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y), \quad u_i(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда линейная комбинация

$$\varphi(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x, y) \quad (67.4)$$

принадлежит классу допустимых функций при любых постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$. Формулу (67.4) можно записать короче:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x, y), \quad (67.5)$$

где $c_0 = 1$. Подставляя выражение (67.5) в функционал (67.3), получим

$$F[\varphi] = \iint_G \left[\left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (67.6)$$

Подберем коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ так, чтобы функция $F[\varphi]$ имела минимум. Для этого необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_j} F[\varphi] &= 2 \iint_G \left[\left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \frac{\partial u_j}{\partial y} \right] dx dy = 0 \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (67.7)$$

или

$$\begin{cases} [u_0, u_1] + c_1[u_1, u_1] + \dots + c_n[u_n, u_1] = 0, \\ [u_0, u_2] + c_1[u_1, u_2] + \dots + c_n[u_n, u_2] = 0, \\ \vdots \\ [u_0, u_n] + c_1[u_1, u_n] + \dots + c_n[u_n, u_n] = 0, \end{cases} \quad (67.8)$$

где

$$[u_i, u_j] = \iint_G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) dx dy,$$

причем

$$[u_i, u_j] = [u_j, u_i]. \quad (67.9)$$

Из линейной системы (67.8) определяются коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$. Функция $\varphi(x, y)$ с коэффициентами, определенными из системы (67.8), представляет собой приближенное решение задачи Дирихле. Точность приближения зависит от выбора координатных функций $u_k(x, y)$ и от числа этих функций [3].

Для ознакомления с применением метода Ритца к более общим краевым задачам для уравнений с частными производными следует обратиться к более подробным руководствам [1, 3].

Пример. Найти функцию $u = u(x, y)$, гармоническую в области $G : x > 0, y > 0, x + y < 1$ и удовлетворяющую на границе $\Gamma : x = 0, y = 0, x + y = 1$ (рисунок 67) условию

$$u|_{\Gamma} = x^2 + y^2. \quad (67.10)$$

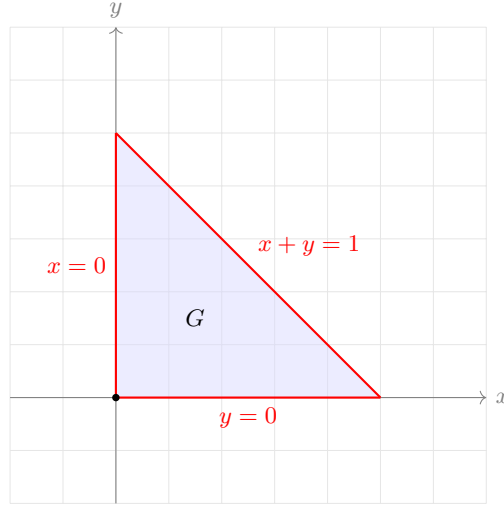


Рисунок 1

Решение. Выберем следующую систему координатных функций:

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_1(x, y) = xy(1 - x - y),$$

$$u_2(x, y) = x^2y(1 - x - y), \quad u_3(x, y) = xy^2(1 - x - y)$$

и составим линейную комбинацию

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + c_1xy(1 - x - y) + c_2x^2y(1 - x - y) + c_3xy^2(1 - x - y). \quad (67.11)$$

Легко проверить, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет краевому условию (67.10) при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3 . Для составления системы (67.8) подсчитываем коэффициенты при неизвестных c_1, c_2, c_3 и свободные члены

$$[u_0, u_1] = [u_1, u_0] = \iint_G [2x(y - 2xy - y^2) + 2y(x - x^2 - 2xy)] dx dy,$$

$$[u_0, u_2] = [u_2, u_0] = \iint_G [2x(2xy - 3x^2y - 2xy^2) + 2y(x^2 - x^3 - 2x^2y)] dx dy,$$

$$[u_0, u_3] = [u_3, u_0] = \iint_G [2x(y^2 - 2xy^2 - y^3) + 2y(2xy - 2x^2y - 3xy^2)] dx dy,$$

$$[u_1, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)^2 + (x - x^2 - 2xy)^2] dx dy,$$

$$[u_1, u_2] = [u_2, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(2xy - 3x^2y - 2xy^2) + (x - x^2 - 2xy)(x^2 - x^3 - 2x^2y)] dx dy,$$

$$[u_1, u_3] = [u_3, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) + (x - x^2 - 2xy)(2xy - 2x^2y - 3xy^2)] dx dy,$$

$$[u_2, u_2] = \iint_G [(2xy - 3x^2y - 2xy^2)^2 + (x^2 - x^3 - 2x^2y)^2] dx dy,$$

$$[u_2, u_3] = [u_3, u_2] = \iint_G [(2xy - 3x^2y - 2xy^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) + (x^2 - x^3 - 2x^2y)(2xy - 2x^2y - 3xy^2)] dx dy,$$

$$[u_3, u_3] = \iint_G [(y^2 - 2xy^2 - y^3)^2 + (2xy - 2x^2y - 3xy^2)^2] dx dy.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 9.

Таблица 9: Значения коэффициентов при неизвестных

i	$[u_0, u_i]$	$[u_1, u_i]$	$[u_2, u_i]$	$[u_3, u_i]$
1	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{3}{1120}$	$\frac{1}{70}$
3	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{3}{1120}$

Отсюда линейная система для определения коэффициентов запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{90} c_1 + \frac{1}{252} c_2 + \frac{1}{252} c_3 = \frac{1}{30}, \\ \frac{1}{252} c_1 + \frac{3}{1120} c_2 + \frac{1}{70} c_3 = \frac{1}{90}, \\ \frac{1}{252} c_1 + \frac{1}{70} c_2 + \frac{3}{1120} c_3 = \frac{1}{90}. \end{cases} \quad (67.12)$$

Решив систему (67.12), находим

$$c_1 = \frac{3031}{997} \approx 3,0401;$$

$$c_2 = c_3 = -\frac{56}{997} = -0,0562.$$

Подставляя найденные значения величин c_1, c_2, c_3 в формулу (67.11), получаем приближенное решение нашей задачи:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)[3,0401 - 0,0562(x + y)]. \quad (67.13)$$

68 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу Дирихле и запишите её вариационную (энергетическую) постановку.
2. Выведите функционал энергии, соответствующий уравнению Пуассона с граничными условиями Дирихле.
3. Объясните основную идею метода Ритца и его связь с задачей минимизации функционала.
4. Постройте приближённое решение методом Ритца в виде линейной комбинации базисных функций.
5. Получите систему алгебраических уравнений для коэффициентов разложения в методе Ритца.
6. Решите одномерную задачу Дирихле для уравнения $-u'' = f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ методом Ритца, используя два базисных функции.
7. Исследуйте условия сходимости метода Ритца и приведите соответствующую теорему.
8. Сравните метод Ритца и метод Галёркина на примере задачи Дирихле.

69 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [2] Березкин И. А. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1959, гл. X.
- [3] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. III.

15-лекция. Интегральные уравнения. Численные методы решения интегральных уравнений

Цель лекции – сформировать у студентов теоретические знания об основных типах интегральных уравнений и их свойствах, а также развить практические навыки применения методов вычислительной математики для построения и анализа численных решений интегральных уравнений, включая методы квадратур, коллокаций, Галёркина и итерационные методы, с оценкой их сходимости, устойчивости и точности.

План лекции:

1. Основные виды линейных интегральных уравнений
2. Решение интегрального уравнения методом конечных сумм
3. Метод вырожденных ядер
4. Метод наименьших квадратов
5. Метод моментов
6. Контрольные вопросы
7. Список литературы

70 Основные виды линейных интегральных уравнений

Под интегральным уравнением понимается уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком определенного интеграла [1–15]. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением линейных интегральных уравнений, в которые неизвестная функция входит лишь в первой степени (линейно). Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся типы интегральных уравнений. Уравнение вида

$$\int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad (70.1)$$

где $K(x, s)$ (ядро) и $f(x)$ — известные функции, называется *интегральным уравнением Фредгольма первого рода*. Уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad (70.2)$$

где λ — числовой параметр, носит название *интегрального уравнения Фредгольма второго рода*. Параметр λ вводится по следующим соображениям: при данном значении λ интегральное уравнение (70.2) не всегда имеет решения. Варируя параметр λ , можно добиться того, чтобы решение уравнения (70.2) существовало. Параметр λ можно также ввести в левую часть уравнения Фредгольма первого рода (70.1). В приложениях встречаются также интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (70.3)$$

и

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (70.4)$$

которые носят названия *интегральных уравнений Вольтерра соответственно первого и второго рода*.

71 Решение интегрального уравнения методом конечных сумм

Метод основывается на приближенном вычислении определенного интеграла с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R(F), \quad (71.1)$$

где x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — абсциссы точек отрезка $[a, b]$, A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции $F(x)$, и $R[F]$ — остаточный член (ошибка) формулы (71.1). Обычно $A_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$. Например, в случае равноотстоящих точек $x_i = a + (i - 1)h$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где $h = (b - a)/(n - 1)$, будем иметь (см. [18]):

1) для формулы прямоугольников:

$$A_i = h \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad A_n = 0;$$

2) для формулы трапеций:

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h.$$

3) Для общей формулы Симпсона при $n = 2m + 1$:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \\ A_2 &= A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3}, \\ A_3 &= A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}. \end{aligned}$$

Другие квадратурные формулы см. в [16,18,19]. Пусть теперь дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (a \leq x \leq b). \quad (71.2)$$

Выбирая точки $x_i \in [a, b]$ и вводя обозначения:

$$y(x_i) = y_i, \quad K(x_i, x_j) = K_{ij}, \quad f(x_i) = f_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

на основании формулы (71.1) будем иметь

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i + R_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (71.3)$$

где R_i — соответствующие ошибки. Отбрасывая в системе (71.3) величины R_i , для приближённых значений Y_i решения $y(x)$ в узлах x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) получим линейную алгебраическую систему

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} Y_j = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (71.4)$$

Вводя символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

и учитывая, что

$$Y_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} Y_j,$$

систему (71.4) можем записать в виде

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}) Y_j = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (71.5)$$

Если

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}) \neq 0, \quad (71.6)$$

то система (71.5) имеет единственное решение Y_i , которое можно найти методом Гаусса или другими методами, разработанными для решения систем алгебраических линейных уравнений (см., например, [18]).

Найдя Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), для решения $y(x)$ получаем из уравнения (71.2) приближенное аналитическое выражение

$$Y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n A_i K(x, x_i) Y_i. \quad (71.7)$$

Различные между собой корни $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_m$ ($m \leq n$) алгебраического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ представляют собой, вообще говоря, приближения собственных значений ядра $K(x, s)$. Если $\tilde{Y}_{ik}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$; $l = 1, \dots, p_k$) — соответствующие ненулевые решения однородной системы

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ij} - \tilde{\lambda}_k A_j K_{ij}) \tilde{Y}_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (71.8)$$

то собственные функции ядра приближенно определяются формулами

$$\tilde{\varphi}_{kl}(x) = \tilde{\lambda}_k \sum_{i=1}^n A_j K(x, x_i) \tilde{Y}_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, m; l = 1, \dots, p_k).$$

Оценка погрешности метода конечных сумм приведена в [16] и [19]. Заметим, что этот метод дает хорошие результаты, если ядро $K(x, s)$ и правая часть $f(x)$ достаточно гладкие функции. В противном случае полезно предварительно преобразовать соответствующим образом интегральное уравнение (см. [19]). Метод конечных сумм может быть применен также к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x).$$

В этом случае приближенные значения Y_i решения $y(x)$ ($a \leq x \leq b$) в узлах x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) будут определяться из системы

$$\lambda \sum_{i=1}^n A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (71.9)$$

Особенно просто применение метода конечных сумм для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

которое можно рассматривать как уравнение Фредгольма второго рода (раздел 70). Здесь $K_{ij} = 0$ при $j > i$, и, следовательно, соответствующая система (71.4) имеет вид

$$Y_i - \lambda \sum_{i=1}^t A_i K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (71.10)$$

Получилась линейная система с треугольной матрицей. Если

$$1 - \lambda A_i K_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (71.11)$$

то из системы (71.10) последовательно находим:

$$Y_1 = f_1 (1 - \lambda A_1 K_{11})^{-1},$$

$$Y_2 = (f_2 + \lambda A_1 K_{21} Y_1) (1 - \lambda A_2 K_{22})^{-1},$$

$$\vdots$$

$$Y_n = \left(f_n + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} A_i K_{ij} Y_j \right) (1 - \lambda A_n K_{nn})^{-1}.$$

Условие (71.11) при данном λ заведомо выполнено, если коэффициенты A_i достаточно малы, чего всегда можно добиться.

Пример. Методом конечных сумм найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^1 x e^{xs} y(s) ds = e^x. \quad (71.12)$$

Выберем узлы $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$. Значения ядра $K(x, s) = x e^{xs}$ и правой части $f(x) = e^x$ в соответствующих точках приведены в следующих таблицах.

Таблица 1: Таблица значений K_{ij}

$x \backslash s$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	0,6420	1,6487
1	0	1,3592	2,7183

Таблица 2: Таблица значений f_i

x_i	0	1/2	1
f_i	1	1,6487	2,7183

Используя квадратурную формулу Симпсона (см. [18])

$$\int_0^1 F(x) dx \approx \frac{1}{6} \left[F(0) + 4F\left(\frac{1}{2}\right) + F(1) \right],$$

для определения приближенных значений Y_i ($i = 1, 2, 3$) решения $y(x)$ в узлах x_i получаем систему

$$\begin{cases} Y_1 = 1, \\ Y_2 + \frac{1}{6}(0,5000Y_1 + 2,5680Y_2 + 1,3592Y_3) = 1,6487, \\ Y_3 + \frac{1}{6}(Y_1 + 6,5948Y_2 + 2,7183Y_3) = 2,7183, \end{cases}$$

или, после упрощений,

$$\begin{cases} Y_1 = 1, \\ 1,4280Y_2 + 0,2265Y_3 = 1,5654, \\ 1,0991Y_2 + 1,4531Y_3 = 2,5516. \end{cases} \quad (71.13)$$

Решая систему (71.13), находим: $Y_1 = 1$; $Y_2 = 0,930$; $Y_3 = 1,053$. Приближенное решение можно выразить формулой

$$Y(x) = e^x - \frac{x}{6}(1 + 3,720e^{\frac{x}{2}} + 1,053e^x).$$

Заметим, что точное решение уравнения (71.12) есть $y(x) = 1$, как легко проверить непосредственно.

72 Метод вырожденных ядер

Определение. Ядро $K(x, s)$ называется **вырожденным**, если оно может быть представлено в виде конечной суммы парных произведений:

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (72.1)$$

где функции $\alpha_i(x)$, так же как и функции $\beta_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), можно считать линейно независимыми.

Для таких ядер интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds \quad (72.2)$$

решается весьма просто. Действительно, подставляя выражение (72.1) в уравнение (72.2), будем иметь

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x), \quad (72.3)$$

где

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (72.4)$$

— некоторые постоянные коэффициенты. Если в выражение (72.4) подставить формулу (72.3), то для определения коэффициентов c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) получим алгебраическую систему линейных уравнений

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j(s) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n c_j \gamma_{ij} = f_i,$$

где

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds. \quad (72.5)$$

Систему (72.5) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ij}) c_j = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (72.6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Обозначим через $\Delta(\lambda)$ определитель системы (72.6):

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ij}) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \lambda\gamma_{11} & -\lambda\gamma_{21} & \cdots & -\lambda\gamma_{n1} \\ -\lambda\gamma_{12} & 1 - \lambda\gamma_{22} & \cdots & -\lambda\gamma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\gamma_{1n} & -\lambda\gamma_{2n} & \cdots & 1 - \lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

и через $\Delta_{ij}(\lambda)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) — алгебраические дополнения соответствующих элементов $\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ij}$ определителя $\Delta(\lambda)$.

Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то на основании правила Крамера [18] находим

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{ij}(\lambda) f_j}{\Delta(\lambda)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, в силу (72.3) интегральное уравнение (72.2) имеет единственное решение

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} f_j \alpha_i(x). \quad (72.7)$$

Отсюда, подставляя вместо f_j соответствующее выражение (72.5) и заменяя сумму интегралов интегралом суммы, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(s) ds, \quad (72.8)$$

где

$$\Delta(x, s, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i(x) \beta_j(s) \Delta_{ij}(\lambda).$$

Из формулы (72.8) вытекает, что функция

$$R(x, s, \lambda) = \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i(x) \beta_j(s) \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (72.9)$$

есть резольвента интегрального уравнения (72.2). Собственные значения ядра $K(x, s)$ определяются из уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (72.10)$$

Если λ_k ($k = 1, 2, \dots, m$; $m \leq n$) есть корень уравнения (72.10) (очевидно, $\lambda_k \neq 0$), то соответствующие собственные функции $\varphi_k(x)$ ядра $K(x, s)$, т. е. нетривиальные решения однородного уравнения

$$\tilde{y}(x) = \lambda_k \int_a^b K(x, s) \tilde{y}(s) ds,$$

будут иметь вид

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \alpha_i(x),$$

где $c_i^{(k)}$ — ненулевые решения линейной однородной системы

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ij} - \lambda_k \gamma_{ij}) c_i^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Если $\lambda = \lambda_k$ есть собственное значение ядра $K(x, s)$, то неоднородное уравнение (72.2) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений.

Пример 1. Решить уравнение

$$y(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (x + s)y(s) ds. \quad (72.11)$$

Ядро $K(x, s) = x + s$ здесь, очевидно, вырожденное. Из уравнения (72.11) получаем

$$y(x) = x^2 + \lambda(c_1 x + c_2), \quad (72.12)$$

где

$$c_1 = \int_{-1}^1 y(s) ds, \quad c_2 = \int_{-1}^1 sy(s) ds. \quad (72.13)$$

Подставляя выражение (72.12) в формулы (72.13), будем иметь систему

$$c_1 = \frac{2}{3} + 2c_2\lambda, \quad c_2 = \frac{2}{3}\lambda c_1; \quad (72.14)$$

отсюда

$$c_1 = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2}, \quad c_2 = \frac{\frac{4}{9}\lambda}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2}.$$

Следовательно, из формулы (12), если $\lambda^2 \neq \frac{3}{4}$, получаем решение

$$y(x) = x^2 + \frac{2\lambda x + \frac{4}{3}\lambda^2}{3 - 4\lambda^2}. \quad (72.15)$$

При $\lambda^2 = \frac{3}{4}$ уравнение (72.11) решений не имеет.

Пример 2. Найти собственные значения, собственные функции и резольвенту ядра $K(x, s) = x + s$ в области $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq s \leq 1$. На основании однородного уравнения

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x + s)y(s) ds$$

имеем

$$y(x) = \lambda(\tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2), \quad (72.16)$$

где коэффициенты $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ определяются из системы (ср. (72.14))

$$\tilde{c}_1 - 2\lambda\tilde{c}_2 = 0, \quad -\frac{2}{3}\lambda\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = 0. \quad (72.17)$$

Приравнявая нулю определитель системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{2}{3}\lambda & 1 \end{vmatrix}, \quad (72.18)$$

получим уравнение

$$1 - \frac{4}{3}\lambda^2 = 0,$$

из которого находим собственные значения: $\lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. Так как ядро $K(x, s)$ симметрическое:

$$K(x, s) = K(s, x),$$

то собственные значения λ_1 и λ_2 действительны. Из системы (72.17) имеем

$$\tilde{c}_1^{(k)} - 2\lambda_k \tilde{c}_2^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

откуда

$$\frac{\tilde{c}_1^{(k)}}{2\lambda_k} = \frac{\tilde{c}_2^{(k)}}{1} = \tilde{c}^{(k)}.$$

Следовательно, на основании (72.16) собственные функции суть

$$\varphi_1(x) = u_1(\sqrt{3}x + 1), \quad \varphi_2(x) = u_2(-\sqrt{3}x + 1),$$

где $u_k = \lambda_k \tilde{c}^{(k)} \neq 0 \quad (k = 1, 2)$. Собственные функции обычно нормируют, полагая

$$\int_{-1}^b \varphi_k^2(x) dx = 1 \quad (k = 1, 2).$$

В нашем случае имеем

$$u_k^2 \int_{-1}^1 (\pm x\sqrt{3} + 1)^2 dx = u_k^2 \cdot 4 = 1.$$

Отсюда можно принять $u_k = 1/2 \quad (k = 1, 2)$, и, следовательно, нормированные собственные функции суть

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \frac{1}{2}(1 + x\sqrt{3}), \quad \tilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2}(1 - x\sqrt{3}).$$

Из определителя (72.18) получаем соответствующие алгебраические дополнения:

$$\Delta_{11}(\lambda) = 1, \quad \Delta_{12}(\lambda) = \frac{2}{3}\lambda, \quad \Delta_{21}(\lambda) = 2\lambda, \quad \Delta_{22}(\lambda) = 1,$$

причем

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{4}{3}\lambda^2.$$

Поэтому, учитывая, что

$$K(x, s) = \alpha_1(x)\beta_1(s) + \alpha_2(x)\beta_2(s),$$

где $\alpha_1(x) = x$, $\beta_1(s) = 1$, $\alpha_2(x) = 1$, $\beta_2(s) = s$, на основании формулы (72.9) находим резольвенту ядра:

$$R(x, s, \lambda) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2} \left(x + 2\lambda xs + \frac{2}{3}\lambda + s \right) = \frac{\frac{2}{3}\lambda + (x + s) + 2\lambda xs}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2}.$$

Решение любого неоднородного уравнения

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^1 (x + s)y(s) ds$$

при $\lambda^2 \neq \frac{3}{4}$ выражается формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^1 \frac{\frac{2}{3}\lambda + (x + s) + 2\lambda xs}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2} f(s) ds.$$

73 Метод наименьших квадратов

Для уравнения

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds - f(x) = 0, \quad (73.1)$$

полагаем

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (73.2)$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\dots$, $\varphi_n(x)$ — известные функции и $c_1, c_2, \dots, c_n$ — неопределенные коэффициенты, причем $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) линейно независимы. Подставляя (73.2) в левую часть уравнения (73.1), получим невязку

$$R[Y_n] = \psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda), \quad (73.3)$$

где $\psi_0(x, \lambda)$ и $\psi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) определяются формулами

$$\varphi_0(x, \lambda) = \varphi_0(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi_0(s) ds,$$

$$\psi_i(x, \lambda) = \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi_i(s) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Согласно методу наименьших квадратов [16], [19], [24] коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) отыскиваются из условия минимума интеграла

$$I = \int_a^b \{R[Y_n]\}^2 dx = \int_a^b \left[\psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda) \right]^2 dx. \quad (73.4)$$

Это требование приводит к алгебраической системе уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (73.5)$$

отсюда на основании (73.4), дифференцируя по параметрам $c_1, c_2, \dots, c_n$ под знаком интеграла, будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_a^b \psi_j(x, \lambda) \left[\psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda) \right] dx = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (73.6)$$

С помощью сокращенных обозначений

$$(\psi_i, \psi_j) = \int_a^b \psi_i(x, \lambda) \psi_j(x, \lambda) dx \quad (73.7)$$

систему (73.6) можно записать в виде нормальной системы способа наименьших квадратов

$$\begin{aligned} c_1(\psi_1, \psi_1) + c_2(\psi_1, \psi_2) + \dots + c_n(\psi_1, \psi_n) &= -(\psi_1, \psi_0), \\ c_1(\psi_2, \psi_1) + c_2(\psi_2, \psi_2) + \dots + c_n(\psi_2, \psi_n) &= -(\psi_2, \psi_0), \\ &\vdots \\ c_1(\psi_n, \psi_1) + c_2(\psi_n, \psi_2) + \dots + c_n(\psi_n, \psi_n) &= -(\psi_n, \psi_0). \end{aligned} \quad (73.8)$$

Заметим, что если $\varphi_0(x) \equiv 0$, то $\psi_0(x) = -f(x)$, и, следовательно, $-(\psi_i, \psi_0) = (\psi_i, f)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Так как $(\psi_i, \psi_j) = (\psi_j, \psi_i)$, то матрица системы (73.8) симметрическая. Вместо интегрального метода наименьших квадратов можно воспользоваться точечным способом наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов применяется также для приближенного нахождения собственных значений и собственных функций ядра $K(x, s)$, аналогично тому как это делается для метода коллокации. А именно, полагая $f(x) \equiv 0$ и $\varphi_0(x) \equiv 0$, откуда $\psi_0(x) \equiv 0$, определяем приближенные значения собственных чисел из алгебраического уравнения

$$\det[(\psi_i, \psi_j)] = 0. \quad (73.9)$$

После этого приближенные собственные функции находятся из однородной системы (73.8), где вместо λ подставлено соответствующее приближенное значение.

Пример. Методом наименьших квадратов найти приближенное решение уравнения

$$y(x) = x^2 + \int_{-1}^1 \operatorname{sh}(x+s)y(s) ds. \quad (73.10)$$

Для первого приближения полагаем $Y = c_1 + c_2x + x^2$. Отсюда

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_0(x) = x^2.$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sh}(x+s) ds = a \operatorname{sh} x, \quad \int_{-1}^1 s \operatorname{sh}(x+s) ds = b \operatorname{ch} x, \quad \int_{-1}^1 s^2 \operatorname{sh}(x+s) ds = c \operatorname{sh} x,$$

где $a = 2 \operatorname{sh} 1 = 2,3504$; $b = 2e^{-1} = 0,7358$; $c = 6 \operatorname{sh} 1 - 4 \operatorname{ch} 1 = 0,8788$, и $\psi_1 = 1 - a \operatorname{sh} x$, $\psi_2 = x - b \operatorname{ch} x$, $\psi_0 = -c \operatorname{sh} x$. Далее находим:

$$\begin{aligned}(\psi_1, \psi_1) &= 2 + a^2 \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} - 1 \right) = 6,4935, \\(\psi_2, \psi_2) &= \frac{2}{3} + b^2 \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 1 \right) = 2,1896, \\(\psi_1, \psi_2) &= -4 (ae^{-1} + b \operatorname{sh} 1) = -8e^{-1} \operatorname{sh} 1 = -3,4586, \\(\psi_1, \psi_0) &= ac \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} - 1 \right) = 1,6800, \\(\psi_2, \psi_0) &= -2ce^{-1} = -0,6466.\end{aligned}$$

Получаем систему для определения коэффициентов c_1 и c_2 :

$$6,4935c_1 - 3,4586c_2 = -1,6800; \quad -3,4586c_1 + 2,1896c_2 = 0,6466.$$

Отсюда получаем:

$$c_1 = -0,5423; \quad c_2 = -0,5613.$$

Таким образом,

$$Y = x^2 - 0,5613x - 0,5423. \quad (73.11)$$

Так как для уравнения (73.10) ядро

$$K(x, s) = \operatorname{sh}(x + s) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} s + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} s$$

вырожденное, то легко получить точное решение

$$y(x) = x^2 + \alpha \operatorname{sh} x + \beta \operatorname{ch} x, \quad (73.12)$$

где

$$\alpha = \frac{6 \operatorname{sh} 1 - 4 \operatorname{ch} 1}{2 - \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} \right)^2} = -0,6821, \quad \beta = \alpha \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} - 1 \right) = -0,5548.$$

Из сравнения формул (73.11) и (73.12) заключаем, что приближенное решение Y близко к точному y , если $|x|$ — малая величина. На концах $x = \pm 1$ расхождения $|y - Y|$ довольно значительно.

74 Метод моментов

Пусть

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds - f(x) = 0. \quad (74.1)$$

Аналогично предыдущему (раздел 73), будем искать приближенное решение уравнения (74.1) в виде конечной суммы

$$Y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (74.2)$$

где $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — некоторые известные линейно независимые функции (координатные функции) и $c_1, c_2, \dots, c_n$ — неопределенные коэффициенты. Подставляя выражение (74.2) в левую часть уравнения (74.1), получим невязку

$$R[Y_n] = \sum_{j=1}^n c_j \left[\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds \right] - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds. \quad (74.3)$$

Согласно методу моментов [16], [19], [24] коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) определяются из условия ортогональности невязки ко всем координатным функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$. Это дает систему уравнений

$$\int_a^b R[Y_n] \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

или, в силу (74.3),

$$\sum_{j=1}^n c_j (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = \lambda \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (74.4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, & \beta_{ij} &= \int_a^b dx \int_a^b K(x, s) \varphi_i(x) \varphi_j(s) ds, \\ \gamma_i &= \int_a^b dx \int_a^b K(x, s) \varphi_i(x) f(s) ds. \end{aligned}$$

Если определитель системы (74.4) $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij})$ отличен от нуля, то из этой системы можно однозначно определить коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$. Тогда формула (74.2) даст приближенное решение интегрального уравнения (74.1). Из уравнения $D(\lambda) = 0$ приближенно находятся собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ядра $K(x, s)$. Найдя ненулевые решения однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^n c_j (\alpha_{ij} - \lambda_k \beta_{ij}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

легко построить (раздел 72) приближенные собственные функции $\tilde{\varphi}^{(k)}(x)$, отвечающие данному собственному значению λ_k . Заметим, что метод моментов по идее совпадает с методом Галеркина (раздел 73). Можно показать [16], [19], что метод моментов равносильен замене ядра $K(x, s)$ некоторым вырожденным ядром $K^{(n)}(x, s)$. Поэтому для приближенного решения $Y_n(x)$ имеется оценка погрешности (см. [16], [19]), аналогичная приведенной выше (раздел 72).

Пример. Найти первые два собственных значения интегрального уравнения

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) y(s) ds = 0,$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} s, & \text{если } s \leq x, \\ x, & \text{если } s > x. \end{cases} \quad (74.5)$$

На основании (74.5) имеем

$$R[y] = y(x) - \lambda \left\{ \int_0^x sy(s) ds + \int_x^1 xy(s) ds \right\}.$$

Положим $Y = c_1x + c_2x^2$. Тогда

$$\begin{aligned} R[Y] &= c_1x + c_2x^2 - \lambda \left[\frac{c_1x^3}{3} + \frac{c_2x^4}{4} + x \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} \right) - \left(\frac{c_1x^3}{2} + \frac{c_2x^4}{3} \right) \right] \\ &= c_1 \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) x + \frac{\lambda}{6} x^3 \right] + c_2 \left[-\frac{\lambda}{3} x + x^2 + \frac{\lambda}{12} x^4 \right]. \end{aligned}$$

Ортогонализируя невязку $R[Y]$, будем иметь систему

$$\int_0^1 R[Y]x dx = 0, \quad \int_0^1 R[Y]x^2 dx = 0$$

или

$$\begin{aligned} c_1 \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6} \cdot \frac{1}{5} \right] + c_2 \left[-\frac{\lambda}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{12} \cdot \frac{1}{6} \right] &= 0, \\ c_1 \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{6} \cdot \frac{1}{6} \right] + c_2 \left[-\frac{\lambda}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{\lambda}{12} \cdot \frac{1}{7} \right] &= 0. \end{aligned}$$

После упрощения получим систему

$$\begin{aligned} c_1(120 - 48\lambda) + c_2(90 - 35\lambda) &= 0, \\ c_1(630 - 245\lambda) + c_2(504 - 180\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (74.6)$$

Приравнявая нулю определитель системы (74.6), получим уравнение для определения собственных значений:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 120 - 48\lambda & 90 - 35\lambda \\ 630 - 245\lambda & 504 - 180\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $65\lambda^2 - 1692\lambda + 3780 = 0$, или

$$\lambda^2 - 26,03\lambda + 58,15 = 0. \quad (74.7)$$

Из уравнения (74.7) будем иметь

$$\tilde{\lambda}_1 = 2,462; \quad \tilde{\lambda}_2 = 23,568.$$

Для сравнения укажем точные собственные значения:

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,467 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{9\pi^2}{4} = 22,206,$$

полученные из решения соответствующей краевой задачи:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Таким образом, погрешность $\tilde{\lambda}_1$ равна примерно 0,2%, а $\tilde{\lambda}_2$ — 6%. В заключение заметим, что рассмотренные методы минимизации невязки (разделы 73, 74) применимы также к решению нелинейных интегральных уравнений. Имеются также другие методы решения интегральных уравнений, например метод Монте-Карло [25].

75 Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию основных видов линейных интегральных уравнений (Фредгольма и Вольтерра). В чём их различие?
2. Запишите общий вид линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.
3. Какие условия обеспечивают существование и единственность решения интегрального уравнения?
4. В чём заключается идея метода конечных сумм?
5. Что такое вырожденное ядро и как оно используется в теории интегральных уравнений?
6. В чём состоит метод наименьших квадратов для интегральных уравнений?
7. Как формируется функционал ошибки в методе наименьших квадратов?
8. Что представляет собой метод моментов?
9. Как выбираются базисные (пробные) функции в методе моментов?
10. Сравните метод вырожденных ядер и метод конечных сумм.
11. Решить уравнение

$$x(t) - \lambda \int_0^1 (t+s) x(s) ds = t$$

методом вырожденных ядер.

12. Применить метод конечных сумм к уравнению

$$x(t) - \int_0^1 ts x(s) ds = 1.$$

13. Аппроксимировать решение уравнения Фредгольма второго рода с ядром

$$K(t, s) = e^{ts}$$

с помощью метода конечных сумм (разбить отрезок на n частей).

14. Представить ядро

$$K(t, s) = t + s$$

в виде вырожденного ядра и решить соответствующее уравнение.

15. Построить функционал метода наименьших квадратов для уравнения

$$x(t) - \int_0^1 ts x(s) ds = t^2.$$

16. Вывести систему нормальных уравнений для задачи из предыдущего пункта.

17. Решить методом моментов уравнение

$$x(t) - \int_0^1 ts^2 x(s) ds = 1,$$

используя базис $\{1, t\}$.

76 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–25].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Виарда Г., Интегральные уравнения, ГТТИ, 1933.
- [2] Гурса Э., Курс математического анализа, т. I, II, ч. 2, ГТТИ, 1934, гл. XXX–XXXIII.
- [3] Гюнтер Н. М., Основы математической физики, ч. 1, Интегральные уравнения, Кубуц, 1931.
- [4] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951, гл. III.
- [5] Ловиг Т. В., Линейные интегральные уравнения, ГТТИ, 1933.

- [6] Михлин С. Г., Интегральные уравнения, изд. 2, Гостехиздат, 1949.
- [7] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы математической физики, т. I, ИЛ, 1958, гл. 8.
- [8] Мускелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, изд. 2, Физматгиз, 1962.
- [9] Монц Г. М., Интегральные уравнения, т. I, ГТТИ, 1934.
- [10] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, 1951.
- [11] Привалов И. И., Интегральные уравнения, ОНТИ, 1935.
- [12] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, Гостехиздат, 1941, гл. II.
- [13] Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, ОНТИ, 1936.
- [14] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
- [15] Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ГТТИ, 1933, ч. I, гл. 11.
- [16] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 4, Физматгиз, 1962.
- [17] Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, изд. 2, «Наука», 1966, гл. IX.
- [18] Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, «Наука», 1966, гл. VIII, XIV, XVI.
- [19] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I, т. II, Физматгиз, 1961.
- [20] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 1948–1949, т. II, гл. II, т. III, гл. XIX.
- [21] Уиттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933, гл. X, XV.
- [22] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.
- [23] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958, гл. V.
- [24] Положий Г. Н., др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. 7.
- [25] Бут Э. Д., Численные методы, Физматгиз, 1959, гл. XII.